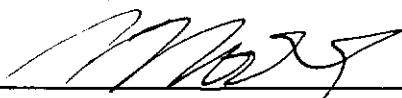



A RIGIDEZ DOS APOIOS NA ANÁLISE DE
FLEXIBILIDADE DE TUBULAÇÕES

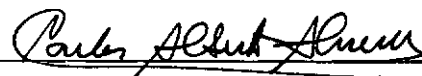
Raul Eduardo Sereno Farache


TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:



MoySES Zindeluk
(Presidente)

William M. Mansour

Carlos A. Almeida

Hans Peter Sterkel

FARACHE, RAUL EDUARDO SERENO

A Rigidez dos Apoios na Análise de Flexibilidade de Tubulações [Rio de Janeiro] 1982

VIII, 128 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M. Sc. Engenharia Mecânica, 1982)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Faculdade de Engenharia

1. Fléxibilidade de Tubulações I. COPPE/UFRJ II. Título (Série)

A meus pais

A Lourdes

O Autor

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Moyses Zindeluk pelo carinho; a
atenção e os valiosos ensinamentos recebidos.

Ao Eng. Hans Peter Sterkel pela orientação na
monografia de fim do curso PROJETO URÂNIO VI, de onde se origi-
nou o presente trabalho.

Ao Dr. Ulf Heeschen pelo apoio recebido.

A minha esposa Lourdes por ter compreendido a ne-
cessidade das inúmeras horas de introspecção.

A Daisy Pierucci pela excelência de sua datilogra-
fia.

O Autor

SUMÁRIO

As estruturas de apoio de um sistema de tubulações são, na indisponibilidade de valores mais precisos, modeladas como molas com altas constantes de rigidez, para fins da análise de flexibilidade. Apesar de que este procedimento encontra justificativa no fato de se obter, geralmente, resultados conservativos para as cargas estimadas nos apoios de um sistema submetido a um dado carregamento, seus efeitos sobre o comportamento do próprio sistema não são facilmente previsíveis.

Investigam-se, neste trabalho, os valores de rigidez de alguns apoios reais. Explora-se aí a possibilidade de expressar a configuração de apoios do tipo bocal de vaso por um número resumido de parâmetros adimensionais. A avaliação comparativa do comportamento de um sistema tomado para exemplo, quando se modelam estruturalmente os apoios ou, alternativamente, é adotada uma sequência crescente de constantes de rigidez, demonstra a necessidade de se obter e utilizar valores que simulem mais adequadamente a rigidez real dos apoios.

ABSTRACT

The support structures of a piping system are, in lack of more accurate values, modelled as springs with high stiffness constants, for flexibility analysis purposes. Although one may justify this procedure based upon the conservative results which, usually, are obtained for the supports' estimated loads, its effects on the system's behaviour are not easily predictable.

Stiffness values for some support structures are here investigated. In this context, the possibility of expressing the shape of supports of the vessel's nozzle kind by a reduced set of dimensionless parameters is explored. A comparative case-study of the behaviour of a system, when its supports are structurally modelled or, instead, an increasing sequence of stiffness constants is adopted, shows the need to obtain and employ values which can simulate more adequately the supports' actual stiffness.

ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO.....</u>	1
I.1 - Procedimentos Gerais para Análise de Flexibilidade de Tubulações.....	1
I.2 - Modelagem da Rigidez dos Apoios.....	3
<u>CAPÍTULO II - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....</u>	6
II.1 - Conceitos Básicos.....	7
II.1.1 - Energia de Deformação e Matriz de Rigidez de uma Estrutura.....	7
II.1.2 - Escolha das Funções de Interpolação.....	11
II.2 - Abordagem Direta.....	12
II.3 - Abordagem Variacional.....	18
II.3.1 - Formulação do Método.....	19
II.4 - Condensação.....	21
<u>CAPÍTULO III - CARGAS LOCALIZADAS EM VASOS CILÍNDRICOS...</u>	24
III.1 - Análise Elástica-Aspectos Básicos.....	24
III.2 - Cargas Localizadas ao Longo de uma Geratriz.....	30
III.3 - Carregamentos Sobre Áreas Retangulares.....	37
III.4 - Considerações Sobre os Métodos de Análise de Car- gas Localizadas e Alguns Resultados Adicionais...	40

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO IV - DETERMINAÇÃO DA RIGIDEZ DE APOIOS REAIS....</u>	45
IV.1 - Matriz de Rigidez dos Suportes.....	45
IV.2 - O Problema da Rigidez de Vasos Cilíndricos.....	51
IV.2.1 - Estudo do Modelo Básico e Definições Gerais.....	51
IV.2.2 - Variação dos Parâmetros do Vaso.....	65
IV.2.3 - Comparação com Outros Resultados.....	81
<u>CAPÍTULO V - INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ DOS APOIOS NO COMPOR-</u> <u>TAMENTO DE UM SISTEMA DE TUBULAÇÕES.....</u>	86
V.1 - Comparações entre os Resultados.....	96
V.1.1 - Carregamento Estático.....	100
V.1.2 - Carregamento Dinâmico.....	104
V.2 - Conclusões.....	107
<u>REFÊRENCIAS.....</u>	110
<u>APÊNDICE I - MATRIZES DE RIGIDEZ CORRESPONDENTES A VARIA-</u> <u>ÇÃO DOS PARÂMETROS ADIMENSIONAIS.....</u>	116
<u>APÊNDICE II - TESTES DA INTERPOLAÇÃO COM OUTRAS COMBINA-</u> <u>ÇÕES DOS PARÂMETROS ADIMENSIONAIS.....</u>	122

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 - PROCEDIMENTOS GERAIS PARA ANÁLISE DE FLEXIBILIDADE DE TUBULAÇÕES

A análise de sistemas de tubulação tem início com o estabelecimento de isométricos que apresentam uma primeira proposta de configuração do sistema real, a partir das condições de processo ocorrentes e sua alocação na estrutura civil. Diz-se que são uma primeira proposta, pois podem vir a sofrer modificações que a análise recomende. Estes isométricos devem conter informações gerais sobre o sistema, tais como propriedades dos materiais utilizados, características das válvulas, condições de temperatura e pressão, dimensões gerais dos tubos utilizados, deslocamentos térmicos dos bocais de componentes, peso e dimensões do isolamento, etc. As cargas admissíveis nos bocais de componentes são definidas por seus fabricantes ou, quando não disponíveis, estimadas com a geometria e o material dos mesmos. O espectro de excitação sísmica, quando a linha vier a sofrer análise dinâmica, é determinado por condições geológicas, geotécnicas e sismológicas do local onde será instalado o sistema. De uma maneira geral, o que esses isométricos apresentam é, na realidade, um subsistema de um sistema muito complexo que, para efeito de análise, foi previamente particionado em sistemas menores. O critério para que esta subdivisão possa ser feita, é que os pontos de contorno entre os sistemas menores tenham movimento nulo ou

quase nulo. Comumente os contornos de um sistema serão então bom
bas, vasos ou outros componentes que, exatamente por sua caracte-
rística de não deslocabilidade, são chamados de pontos de ancora
gem. A partir da observação dos vãos livres, define-se a locali-
 zação de suportes estruturais intermediários, bastante rígidos,
 cujo objetivo é a sustentação do peso da tubulação e/ou restri-
 ção de seus movimentos horizontais. As vezes, quando a linha se
 torna muito enrijecida com a colocação dos suportes para susten-
 tação do peso, impedindo desta forma os deslocamentos térmicos e
 elevando excessivamente o nível de tensões, substituem-se estes
 suportes rígidos por suporte de mola (spring-hangers). Para uni-
 ficar a nomenclatura no texto que segue, será adotado o nome de
 "ponto de apoio", ou simplesmente "apoio", sempre que o objetivo
 for referir-se aos pontos de ancoragem ou aos pontos em que exis-
 tem suportes estruturais rígidos. Usualmente estes apoios são
 modelados como molas com constantes de rigidez muito altas. A in-
 vestigação desta modelagem é que se constitui no motivo princi-
 pal do presente trabalho, sendo por isso discutida com mais deta-
 lhes na seção (I.2). O procedimento tem continuidade com a codi-
 ficação do modelo do sistema de maneira a ser possível a utiliza-
 ção de programas de elementos finitos tais como: KWUROHR¹³, PI-
 PESD^{3,2} e SAP IV, capazes de desenvolver uma análise completa de
 tensões, seguindo estritamente recomendações de normas (ASME Boi-
 ler and Pressure Vessel Section). Ocasionalmente, a ocorrência
 de tensões acima das admissíveis, forças atuantes nos bocais dos
 componentes maiores do que as definidas por seus fabricantes ou
 outras ocorrências, tais como flecha de um vão livre maior do
 que a aceitável, podem indicar a necessidade de uma revisão no

conceito de suporta \tilde{c} o \tilde{a} o ou mesmo no pr \acute{o} prio arranjo da tubula \tilde{c} o \tilde{a} o. Nestes casos, ap \acute{o} s as modifica \tilde{c} o \tilde{e} s propostas, o sistema \acute{e} submetido novamente a an \acute{a} lise. Este processo \acute{e} repetido at \acute{e} que todas as condi \tilde{c} o \tilde{e} s de aprova \tilde{c} o \tilde{a} o sejam satisfeitas.

I.2 - MODELAGEM DA RIGIDEZ DOS APOIOS

Em geral a rigidez dos pontos de apoio n \tilde{a} o \acute{e} conhecida a priori na fase de an \acute{a} lise. Isto se d \tilde{a} em decorr \tilde{e} ncia de que muitas v \tilde{e} zes a necessidade de um suporte resistir a certos esfor \tilde{c} os, determinados somente ap \acute{o} s o c \acute{a} lculo do pr \acute{o} prio sistema, \acute{e} que vai definir a escolha de um tipo espec \acute{i} fico de estrutura de sustenta \tilde{c} o \tilde{a} o com sua rigidez associada. Em outros casos, isto ocorre porque os fabricantes de componentes n \tilde{a} o fornecem usualmente valores de rigidez para os pontos de conex \tilde{a} o destes com a tubula \tilde{c} o \tilde{a} o. A n \tilde{a} o disponibilidade de valores exatos de rigidez \acute{e} suprida com valores recomendados pelos pr \acute{o} prios programas de an \acute{a} lise, conhecidos como valores de "default". Como exemplo de valores de "default" pode se citar: 10^{10} , KWUROHR, e SAP IV; 10^{12} , PIPESD; 10^{30} , ROHR2. Estes se referem indistintamente a rigidez \tilde{a} transla \tilde{c} o \tilde{a} o e \tilde{a} rota \tilde{c} o \tilde{a} o e s \tilde{a} o dados nestes programas, respectivamente, nas unidades N/mm e N.mm/rad. Outras vezes \acute{e} a pr \acute{o} pria norma de projeto que recomenda valores, por exemplo⁴⁰, de 10^7 N/mm para a transla \tilde{c} o \tilde{a} o e 10^{12} N.mm/rad para a rota \tilde{c} o \tilde{a} o. A compara \tilde{c} o \tilde{a} o dos valores de "default" com os valores de rigidez de suportes reais mostra que em geral a modelagem n \tilde{a} o est \tilde{a} sendo feita adequadamente, visto que os suportes reais tem rigidez consideravelmente inferior \tilde{a} que \acute{e} fornecida pelos valores de "de-

fault". Uma noção quantitativa desta diferença pode ser obtida ao se observar os resultados dos trabalhos de SKODA¹¹ et al. e de SCHMID³⁶. Os primeiros determinam a rigidez de vários apoios, do tipo suporte estrutural rígido, com utilização prevista em centrais nucleares. Os suportes aí são considerados super-elementos e têm sua matriz de rigidez global condensada (ver seção (II.4)) nos graus de liberdade dos pontos de união destes com a tubulação. Os resultados do trabalho mostram que a rigidez dos suportes estava na faixa de 3×10^2 à 3×10^6 N/mm para a translação e 3.3×10^6 à 1.4×10^{11} N.mm/rad para a rotação. SCHMID realizou um trabalho análogo ao descrito acima que, porém, incluiu ancoragens em vasos. Os valores obtidos aí mostraram que a rigidez dos apoios considerados se situava na faixa de 10^5 à 10^7 N/mm e de 1×10^{10} a 5×10^{10} N.mm/rad respectivamente para a rigidez à translação e à rotação. ZINDELUK et al.¹⁶ analisam o problema dos apoios em bocais de vasos e mostram que, para o modelo adotado, em média a rigidez à translação é da ordem de 10^4 N/mm e à rotação de 10^9 N.mm/rad.

A influência, no comportamento estático e dinâmico de um sistema de tubulações, da modelagem dos apoios com rigidez excessivamente alta foi analisada por diversos autores^{9,10,12,15,42}. A conclusão comum a todos estes é que a influência é sensível e justifica uma preocupação maior no sentido de se obter e utilizar na análise de flexibilidade de tubulações valores que simulem mais realisticamente a rigidez dos apoios. É nesta mesma linha de pesquisa que se procurou desenvolver o presente trabalho.

O Capítulo III trata de uma forma geral o problema das cargas localizadas em vasos cilíndricos. O cálculo da matriz de rigidez dos modelos para dois suportes reais é desenvolvido no Capítulo IV. Ali é também relatada uma investigação do caso da rigidez de bocais de vasos. Procura-se determinar os valores de rigidez e a influência sobre estes da variação de certos parâmetros adimensionais característicos do vaso a serem ali definidos. Para isso um vaso de proporções que podem ser consideradas medianas é tomado para estudo e sua matriz de rigidez é determinada. Considerando-se então que este vaso tenha valores médios para os parâmetros característicos, são adotadas variações individuais destes, em torno dos valores médios, até valores extremos, produzindo novas matrizes de rigidez. As participações na rigidez do vaso do efeito local da casca e do efeito de viga são comparadas. No Capítulo V procura-se avaliar comparativamente os comportamentos estático e dinâmico de um sistema de tubulações tomado como exemplo; quando, na análise do mesmo, se modela os apoios com a rigidez dos suportes e do vaso, determinadas no Capítulo IV, e quando se considera uma faixa de valores de rigidez de 10^2 a 10^9 N/mm. para a translação e 10^7 a 10^{14} N.mm/rad para a rotação.

CAPÍTULO II

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Apesar de já ter sua utilização largamente difundida, o método dos elementos finitos ainda pode ser considerado um tópico recente na área de mecânica estrutural. Deste modo, e devido à utilização constante do mesmo via programas fechados no desenvolvimento do presente trabalho, considerou-se de valia apresentar, em uma forma sucinta, os seus fundamentos teóricos.

O princípio básico do método é que um "continuum" (a estrutura inteira) pode ser modelada analiticamente por suas subdivisões, em regiões (os elementos finitos) nas quais o comportamento é descrito por um conjunto de funções de interpolação adotadas, representando as variáveis de campo (pressão, temperatura, deslocamento, tensão, etc.) nessas regiões. Estas funções são definidas em termos dos valores das variáveis de campo em pontos específicos denominados "nós" ou "pontos nodais". Para a representação em elementos finitos do problema, os valores nodais das variáveis de campo se tornam as novas incógnitas. Assim que estas sejam conhecidas, as funções de interpolação definem a variável de campo ao longo do conjunto de elementos.

Duas abordagens do método são apresentadas nas seções (II.2) e (II.3). A primeira delas é chamada "abordagem direta" porque sua origem pode ser traçada a partir do método da rigidez ou dos deslocamentos da análise estrutural clássica. A se-

gunda é conhecida como "abordagem variacional". A abordagem variacional, mais versátil e mais avançada, se baseia no cálculo das variações e envolve a extremização de um funcional. Em ambas o enfoque dado aqui voltou-se para o cálculo estrutural.

Para que se possa apresentar as duas abordagens ou formulações do método, alguns conceitos básicos são introduzidos na seção (II.1). A seção (II.4) foi elaborada com o intuito de familiarizar o leitor com alguns conceitos adicionais necessários a melhor compreensão do que será exposto no Capítulo IV.

II.1 - CONCEITOS BÁSICOS

II.1.1 - Energia de Deformação e Matriz de Rigidez de uma Estrutura

A energia de deformação, que para os corpos elásticos iguala o trabalho de deformação, pode ser expressa em função do carregamento externo como (Teorema de Clapeyron):

$$U = \frac{1}{2} \sum p_i u_i = \frac{1}{2} \{u\}^T \cdot \{P\}$$

onde:

U - energia de deformação da estrutura

$\{P\}$ - vetor das cargas nodais

$\{u\}$ - vetor dos deslocamentos nodais

Pode-se escrever a energia de deformação em termos da matriz de rigidez. Por definição, a matriz de rigidez é aquela que transforma deslocamentos em esforços:

$$\{P\} = [K] \{u\} \quad (II.1)$$

Deste modo:

$$U = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} \quad (II.2)$$

As expressões acima podem ser particularizadas para um elemento "e":

$$U_e = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T \{P\}_e = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T [k]_e \{\delta\}_e \quad (II.3)$$

onde $[k]_e$ é a matriz de rigidez do elemento e $\{\delta\}_e$ o vetor dos seus deslocamentos nodais. Deste modo, uma estrutura composta de m elementos pode ter sua energia de deformação total expressa como a soma das energias de deformação individuais de seus elementos:

$$U = \sum_{e=1}^m U_e = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^m \{\delta\}_e^T [k]_e \{\delta\}_e$$

que pode ser reescrita como:

$$U = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [\bar{k}] \{\delta\} \quad (II.4)$$

onde

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} [k]_{e1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [k]_{e2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots 0 & [k]_{em} \end{bmatrix} \quad \text{e } \{\delta\} = \begin{Bmatrix} \{\delta\}_{e1} \\ \{\delta\}_{e2} \\ \vdots \\ \{\delta\}_{em} \end{Bmatrix}$$

sendo $[\bar{k}]$ chamada de matriz de rigidez da estrutura desmembrada.

Apesar de que o interesse resida na determinação da matriz de rigidez dos elementos relacionada a um sistema único de eixos cartesianos, a obtenção direta desta seria, muitas vezes, bastante trabalhosa. Assim sendo é hábito definir-se um sistema de eixos denominado de "local", para cada elemento, e um sistema "global", para o conjunto.

Subentenda-se então que todas as operações realizadas até agora com o subscrito "e" se referem a um elemento, em coordenadas locais. Além disso, para efeito de simplificação de notação, este subscrito será dispensado no texto que segue; ficando convencionado porém que quando houver referência a deslocamentos nodais, de elementos em coordenadas locais, a notação será $\{\delta\}$ e caso sejam em coordenadas globais será $\{u\}$; as

matrizes de rigidez correspondentes serão $[k]$ e $[K]$. Para que se possa determinar a matriz de rigidez global da estrutura, definida em um sistema global de eixos, a partir das matrizes de rigidez dos elementos orientadas segundo eixos locais, considere-se a expressão:

$$\{\delta\} = [\beta] \{u\} \quad (\text{II.5})$$

Esta define a matriz $[\beta]$ que transforma deslocamentos segundo as coordenadas globais em deslocamentos relativos as coordenadas dos elementos. Esta matriz também é conhecida com o nome de matriz de incidência cinemática¹,

Além disso, tem-se que:

$$U = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [\bar{k}] \{\delta\} \quad (\text{II.6})$$

Substituindo (II.5) em (II.6) vem:

$$U = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} = \frac{1}{2} \{u\}^T [\beta]^T [\bar{k}] [\beta] \{u\} \quad (\text{II.7})$$

Portanto, para satisfazer a igualdade em (II.7):

$$[K] = [\beta]^T [\bar{k}] [\beta] \quad (\text{II.8})$$

II.1.2 - Escolha das Funções de Interpolação

Tendo em vista o problema da análise estrutural, a escolha recairá sobre o deslocamento como variável de campo.

As incógnitas básicas do problema serão então os deslocamentos dos pontos nodais. Na escolha da função de interpolação que defina um estado de deslocamento em cada elemento finito, em termos de seus deslocamentos nodais, o critério principal é de que esta satisfaça a compatibilidade de deslocamentos entre elementos adjacentes. Esta função de interpolação é conhecida como "função deslocamento". Se a função deslocamento satisfaz esta compatibilidade nos contornos dos elementos, a energia de deformação na idealização (estrutura discretizada) fornece um valor que aproxima a energia do corpo contínuo.

Tomando como exemplo um elemento triangular com três nós e dois possíveis deslocamentos para cada nó e admitindo que o elemento considerado seja suficientemente pequeno, de modo que se possam tomar os deslocamentos em um ponto genérico como funções lineares das coordenadas x e y desse ponto, a função deslocamento seria:

$$\{\delta(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

Para um tetraedro, considerando a condição de linearidade expressa acima e a existência de doze incógnitas deslocamento, a função escrita em forma expandida seria:

$$\delta_x = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z \quad (\text{II.10.a})$$

$$\delta_y = a_5 + a_6x + a_7y + a_8z \quad (\text{II.10.b})$$

$$\delta_z = a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z \quad (\text{II.10.c})$$

Os coeficientes a_i são conhecidos como as "coordenadas generalizadas" do elemento².

Em uma representação polinomial de uma variável de campo, o número de graus de liberdade ou variáveis nodais associadas ao elemento deve igualar o número de coordenadas generalizadas.

II.2 - ABORDAGEM DIRETA

É feito aqui o desenvolvimento no caso de tensões planas. A extensão a outras situações é apresentada por De VRIES⁷.

Considere-se um elemento finito "e", de forma genérica, com n pontos nodais e seja $\{\delta(x, y)\}$ a função deslocamento escolhida na forma:

$$\{\delta(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{Bmatrix} = [A(x,y)] \{a\} \quad (\text{II.11})$$

O número de coordenadas generalizadas a_i é então $2n$. Sejam então x_i e y_i as coordenadas do ponto nodal i , $1 \leq i \leq n$. Particularizando (II.11) para o ponto nodal i tem-se:

$$\{\delta(x_i, y_i)\} = [A(x_i, y_i)] \{a\} \quad (\text{II.12})$$

Repetindo o mesmo procedimento para todos os pontos nodais i , $1 \leq i \leq n$, pode-se condensar as expressões correspondentes (II.12) na forma:

$$\begin{Bmatrix} \{\delta(x_1, y_1)\} \\ \{\delta(x_2, y_2)\} \\ \vdots \\ \{\delta(x_i, y_i)\} \\ \vdots \\ \{\delta(x_n, y_n)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A(x_1, y_1)] \\ [A(x_2, y_2)] \\ \vdots \\ [A(x_i, y_i)] \\ \vdots \\ [A(x_n, y_n)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \end{Bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

Que pode ser reescrita em forma mais compacta:

$$\{\delta\} = [A] \{a\} \quad (\text{II.14})$$

Deste modo as coordenadas generalizadas $\{a\}$ podem ser escritas em função dos deslocamentos incógnitos como:

$$\{a\} = [A]^{-1} \{\delta\} \quad (\text{II.15})$$

Substituindo (II.15) em (II.11), vem:

$$\{\delta(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{Bmatrix} = [A(x, y)] \cdot [A]^{-1} \{\delta\} \quad (\text{II.16})$$

Para pequenas deformações, a relação cinemática entre deslocamentos e deformações é dada por:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta x}{\partial x} \\ \frac{\partial \delta y}{\partial y} \\ \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

que pode ser reescrita na forma:

$$\{\epsilon\} = [B] \{a\} = [B] [A]^{-1} \{\delta\} \quad (\text{II.18})$$

onde $[B]$ é a matriz que transforma as coordenadas generalizadas nas deformações. Se (II.11) for escrita de forma ligeiramente diferente, particionando $[A(x, y)]$ em duas submatrizes como expres

so abaixo:

$$\{\delta(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x(x, y) \\ A_y(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \end{Bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

ou, expandindo:

$$\delta_x = [A_x(x, y)] \{a\} \quad (\text{II.20.a})$$

$$\delta_y = [A_y(x, y)] \{a\} \quad (\text{II.20.b})$$

Pode-se então determinar a forma de $[B]$ facilmente, bastando efetuar as derivações expressas em (II.17) para chegar a:

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial [A_x(x, y)]}{\partial x} \\ \frac{\partial [A_y(x, y)]}{\partial y} \\ \frac{\partial [A_x(x, y)]}{\partial y} + \frac{[A_y(x, y)]}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \end{Bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

Comparando então (II.21) com (II.18), é óbvia a forma de $[B]$.

A relação constitutiva que liga tensões a deformações é expressa matricialmente como:

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} = [D] [B] [A]^{-1} \{\delta\} \quad (\text{II.22})$$

Estando contidas em $[D]$ as características do material. Para um meio elástico isotrópico no estado plano de tensões:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad e \quad \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu \sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned}$$

Ficando então determinada $[D]$ como:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

onde ν é o coeficiente de Poisson e E o módulo de elasticidade do material. Caso o elemento esteja sujeito a deformações iniciais $\{\epsilon_0\}$ devidas a um prẽ-tensionamento ou um campo termoelástico, as tensões finais serão obtidas como abaixo:

$$\{\sigma\} = [D] \{\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}\} \quad (\text{II.24})$$

A matriz de rigidez do elemento pode ser então obtida. Para isso considere-se dU , a diferencial da energia de deformação de um volume elementar dV do elemento "e",

$$dU = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV .$$

Integrando sobre o volume do elemento vem:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (\text{II.25})$$

Substituindo em (II.25) as expressões de $\{\epsilon\}$ e $\{\sigma\}$ obtidas em (II.18) e (II.22), tem-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_{VOL} \{\delta\}^T [A]^{-T} [B]^T [D] [B] [A]^{-1} \{\delta\} dV \quad (\text{II.26})$$

Porém $\{\delta\}$ e $[A]$ são independentes de x e y portanto podem ser retiradas da integral, produzindo:

$$U = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [A]^{-T} \left\{ \int_{VOL} [B]^T [D] [B] dV \right\} [A]^{-1} \{\delta\} \quad (\text{II.27})$$

Comparando (II.27) com (II.3), vê-se que a matriz de rigidez do elemento é:

$$[k] = [A]^{-T} \left\{ \int_{VOL} [B]^T [D] [B] dV \right\} [A]^{-1} \quad (\text{II.28})$$

Obtida a matriz de rigidez de cada elemento, a montagem é semelhante à do cálculo matricial de estruturas. A ma-

triz de rigidez global do conjunto é obtida como em (II.8).

$$[K] = [\beta]^T [\bar{k}] [\beta]$$

Os deslocamentos são obtidos com a expressão (II.1),

$$\{u\} = [K]^{-1} \{P\} .$$

Com o problema cinematicamente determinado a continuação é imediata:

$$\{\delta\} = [\beta] \{u\}$$

$$\{\sigma\} = [D] [B] [A]^{-1} \{\delta\}$$

e

$$\{\epsilon\} = [B] [A]^{-1} \{\delta\}$$

II.3 - ABORDAGEM VARIACIONAL

A formulação variacional pode ser feita de três modos básicos: pela energia potencial, via deslocamentos, pela energia complementar, em termos das tensões, ou ainda por formulações mixtas dos dois primeiros modos. A formulação apresentada aqui se refere ao primeiro modo. Será mostrado que, se for definido um sistema de deslocamentos para um elemento da estrutura, o processo de minimização da expressão para a energia potencial conduzirá a um sistema de equações para os deslocamentos nodais incógnitos.

II.3.1 - Formulação do Método

Para efeito de aplicação da formulação variacional, os passos expostos na formulação direta devem ser seguidos até a derivação da equação (II.27), onde foi obtida a energia de deformação em função dos deslocamentos arbitrários δ_i ,

$$U = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [A]^{-T} \left\{ \int_{VOL} [B]^T [D] [B] dV \right\} [A]^{-1} \{\delta\}$$

$$(II.28) \quad \frac{1}{2} \{\delta\}^T [k] \{\delta\}$$

O trabalho virtual expresso em termos do carregamento é:

$$W = \{P\}^T \{\delta\}$$

Assim, a energia potencial do elemento pode ser escrita⁸ como:

$$\Pi = U - W \quad \text{ou,}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [k] \{\delta\} - \{\delta\}^T \{P\} \quad (II.29)$$

Inspeção da equação (II.29) mostra que Π é uma função dos n valores $\{\delta_1\}; \{\delta_2\}; \dots; \{\delta_n\}$ definidos como em (II.13),

$$\Pi = f(\{\delta_1\}, \{\delta_2\}, \dots, \{\delta_n\}) \quad (\text{II.30})$$

Portanto a condição para Π ser um valor extremo⁷ (estacionário) é que:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\delta\}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \Pi}{\partial \{\delta_1\}} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \{\delta_2\}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \{\delta_n\}} \end{array} \right\} = 0 \quad (\text{II.31})$$

Além disso, sabendo que são válidas⁷ para diferenciação de matrizes as duas expressões abaixo para $\{Y\}$; $[Q]$ e $\{A\}$ genéricas,

$$\frac{\partial}{\partial \{Y\}} \{Y\}^T [Q] \{Y\} = 2 [Q] \{Y\} \quad (\text{II.32})$$

$$\frac{\partial}{\partial \{Y\}} \{Y\}^T \{A\} = \{A\} \quad (\text{II.33})$$

A condição para Π , como em (II.34), ser estacionária ficará:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial \{\delta\}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \{\delta\}} \{\delta\}^T [k] \{\delta\} - \frac{\partial}{\partial \{\delta\}} \{\delta\}^T \{P\} = \\ &= [k] \{\delta\} - \{P\} = 0\end{aligned}\quad (\text{II.35})$$

Logo

$$[k] \{\delta\} = \{P\} \quad (\text{II.36})$$

Deste modo, de uma formulação puramente variacional chega-se a expressão que permite determinar as relações entre força e deslocamento para um elemento. A aplicação deste procedimento para todos os elementos conduzirá às equações necessárias à completa descrição do comportamento da estrutura. Assim, a determinação das tensões e deformações é imediata e idêntica à que já foi exposta na formulação direta, não sendo por isso repetida aqui.

II.4 - CONDENSAÇÃO

O termo condensação se refere aqui a contração em tamanho de um sistema de equações com a eliminação de certos graus de liberdade (g.l.). As equações condensadas devem ser expressas em termos de g.l. pré-selecionados. Como foi visto em (II.36) as equações de equilíbrio do elemento tem a forma padrão $[k] \{\delta\} = \{P\}$, onde $\{\delta\}$ é o vetor de todos os g.l. do elemento. Se o elemento tem g.l. internos, pode-se rearranjar e particionar $[k]$ como segue:

$$\begin{bmatrix} [k_{11}] & \vdots & [k_{12}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [k_{21}] & \vdots & [k_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \dots \\ \{\delta_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \dots \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.37.a})$$

onde $\{\delta_2\}$ é o vetor dos g.ℓ. nodais internos e $\{P_2\}$ é o vetor associado das ações nodais resultantes. Se (II.37) for expandida estas equações se tornarão:

$$[k_{11}] \{\delta_1\} + [k_{12}] \{\delta_2\} = \{P_1\} \quad (\text{II.37.b})$$

$$[k_{21}] \{\delta_1\} + [k_{22}] \{\delta_2\} = \{P_2\} \quad (\text{II.37.c})$$

Quando a equação (II.37.c) for resolvida para $\{\delta\}_2$ e o resultado substituído em (II.37.b) obtém-se:

$$\left[[k_{11}] - [k_{12}] [k_{22}]^{-1} [k_{21}] \right] \{\delta_1\} = \{P_1\} - [k_{12}] [k_{22}]^{-1} \{P_2\}$$

ou

$$[\tilde{k}] \{\delta_1\} = \{\hat{P}\} \quad (\text{II.38})$$

A equação (II.38) é a forma condensada que contém somente os g.ℓ. associados com os nós externos do elemento. O processo de condensação que foi aplicado a um elemento pode ser estendido a um grupo de elementos para eliminar g.ℓ. nodais que não estejam no contorno de um grupo de elementos acoplados.

O procedimento denominado "subestruturação", em problemas de mecânica estrutural, oferece uma interpretação física do processo de eliminar g.ℓ. internos. Neste método, uma estrutura

ra altamente complexa tal como uma ponte, um avião ou o corpo de um automóvel é vista como composta de um certo número de elementos finitos muito complexos, também chamados "super-elementos". Por exemplo, no caso de um avião, poderia-se analisar separadamente as asas, a fuselagem e a cauda. No caso de um sistema de tubulações, sua estrutura de sustentação, seja um vaso, uma bomba ou um suporte, poderia ser tratada independentemente da tubulação em si.

CAPÍTULO III

CARGAS LOCALIZADAS EM VASOS CILÍNDRICOS

São apresentados aqui os resultados de literatura disponíveis para o problema das deflexões devidas a carregamentos localizados sobre a superfície de cascas cilíndricas. Alguns aspectos básicos de sua análise elástica são introduzidos na seção (III.1). As seções (III.2) e (III.3) tratam, respectivamente, das situações de carregamentos distribuídos ao longo de uma geratriz e sobre uma região retangular da casca cilíndrica. Uma breve discussão sobre estes resultados; sua aplicabilidade ao caso de bocais de vasos e alguns resultados adicionais do problema estão contidos na seção (III.4).

III.1 - ANÁLISE ELÁSTICA-ASPECTOS BÁSICOS

Considere-se um elemento de casca cilíndrica, comprimento dx e largura $rd\theta$. As forças normais, N_x e N_θ ; transversais, Q_x e Q_θ , e tangenciais, $N_{\theta x}$ e $N_{x\theta}$, por unidade de comprimento e as forças externas, p_x ; p_r e p_θ , por unidade de área, estão apresentadas na fig. (III.1.a). Os momentos de flexão, M_x e M_θ , e os momentos de torsão, $M_{x\theta}$ e $M_{\theta x}$, por unidade de comprimento, são apresentados na fig. (III.1.b).

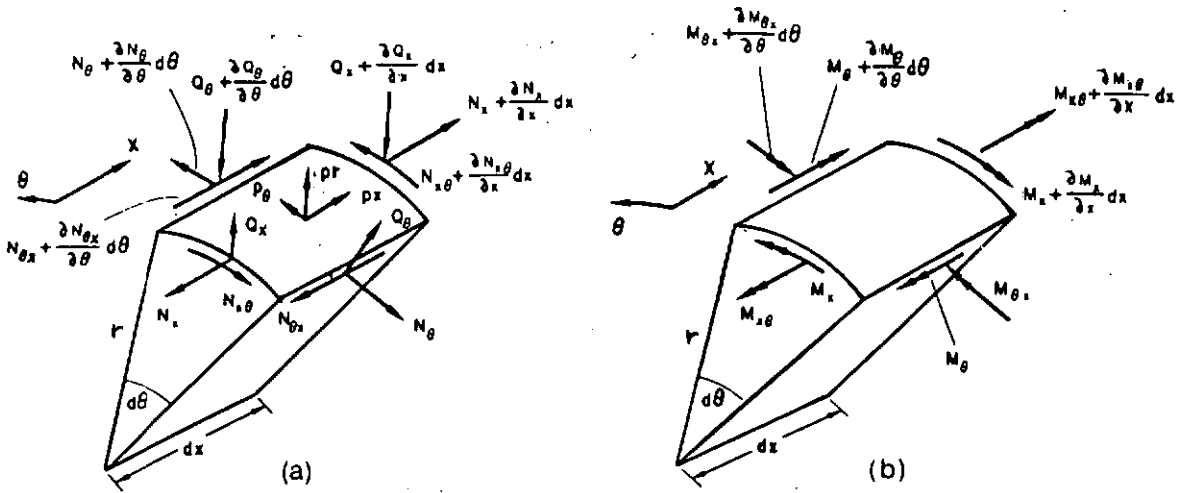


Fig. (III.1): Forças atuantes no elemento de casca cilíndrica

As equações de equilíbrio do elemento podem¹⁹ então ser escritas como:

$$\frac{r \partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + r p_x = 0 \quad (\text{III.1.a})$$

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} - Q_\theta + r p_\theta = 0 \quad (\text{III.1.b})$$

$$\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial Q_x}{\partial x} + N_\theta - r p_r = 0 \quad (\text{III.1.c})$$

$$\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - r Q_\theta = 0 \quad (\text{III.1.d})$$

$$r \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - r Q_x = 0 \quad (\text{III.1.e})$$

$$r N_{x\theta} - r N_{\theta x} + M_{\theta x} = 0 \quad (\text{III.1.f})$$

Se os deslocamentos da superfície média da casca são u , v e w , definidos como na fig. (III.2), as deformações; mudanças na curvatura e rotação serão^{18, 24, 17}:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{III.2.a})$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r} \quad (\text{III.2.b})$$

$$\gamma_{\theta x} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{III.2.c})$$

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{III.2.d})$$

$$\chi_\theta = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \quad (\text{III.2.e})$$

$$2\chi_{\theta x} = \frac{1}{r} \left[2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (\text{III.2.f})$$

Onde χ_x e χ_θ representam as mudanças na curvatura da superfície de referência durante a deformação.

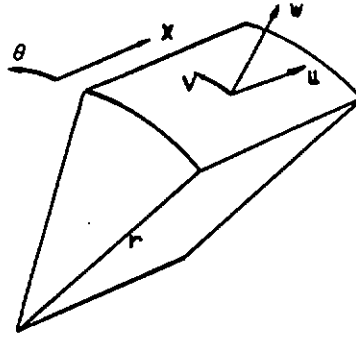


Fig. (III.2): Orientação para os deslocamentos da superfície média da casca

Considerando que a casca cilíndrica seja constituída de um material elástico; linear e isotrópico e que as deformações $\bar{\epsilon}_\theta$ e $\bar{\epsilon}_x$ e a distorção $\bar{\gamma}_{\theta x}$, a uma distância z da superfície média, sejam dadas por (hipótese de Love):

$$\bar{\epsilon}_\theta = \epsilon_\theta - z X_\theta \quad ; \quad (\text{III.3.a})$$

$$\bar{\epsilon}_x = \epsilon_x - z X_x \quad ; \quad (\text{III.3.b})$$

$$\bar{\gamma}_{\theta x} = \gamma_{\theta x} - 2z X_{\theta x} \quad . \quad (\text{III.3.c})$$

Onde z é tomado como positivo na direção da normal exterior. A aplicação da lei de Hooke pode conduzir a:

$$\bar{\epsilon}_{\theta} = \frac{\sigma_{\theta}}{E} - \frac{\nu \sigma_x}{E} ; \quad (\text{III.4.a})$$

$$\bar{\epsilon}_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_{\theta}}{E} ; \quad (\text{III.4.b})$$

$$\bar{\gamma}_{\theta x} = \frac{\tau_{\theta x}}{G} . \quad (\text{III.4.c})$$

Resolvendo as equações (III.4) para as tensões e integrando sobre a variável z ao longo da espessura, t , da casca, obtem-se expressões para as resultantes como:

$$N_{\theta} = K(\epsilon_{\theta} + \nu \epsilon_x) ; \quad (\text{III.5.a})$$

$$N_x = K(\epsilon_x + \nu \epsilon_{\theta}) ; \quad (\text{III.5.b})$$

$$N_{\theta x} = K \frac{(1-\nu)}{2} \gamma_{\theta x} ; \quad (\text{III.5.c})$$

$$M_{\theta} = D(X_{\theta} + \nu X_x) ; \quad (\text{III.5.d})$$

$$M_x = D(X_x + \nu X_{\theta}) ; \quad (\text{III.5.e})$$

$$M_{\theta x} = D(1-\nu) X_{\theta x} . \quad (\text{III.5.f})$$

onde

$$K = \frac{E h}{1-\nu^2} \quad e \quad D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} .$$

É possível¹⁸ eliminar os termos em v das expressões para X_θ e $X_{\theta x}$ e ignorar a equação (III.1.f) e o efeito de Q_θ em (III.1.b) para, ao substituir as expressões das resultantes (III.5) nas equações de equilíbrio, chegar-se a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+v}{2r} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{p_x}{K} = 0 \quad ; \quad (\text{III.6.a})$$

$$\frac{1+v}{2r} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{p_\theta}{K} = 0 \quad ; \quad (\text{III.6.b})$$

$$v \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r} + \frac{t^2}{12} \left[\frac{r \partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right] - \frac{r p_r}{K} = 0 \quad .$$

(III.6.c)

Estas equações governam a solução completa²⁰ para o problema da casca cilíndrica com carregamentos p_x , p_θ e p_r e condições de contorno adequadas. Se $p_x = p_\theta = p_r = 0$, estas equações podem ser reescritas como:

$$\nabla^8 w + \frac{12(1-v^2)}{r^2 t^2} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad ; \quad (\text{III.6.a})$$

$$\nabla^4 v = - \frac{(2+v)}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{1}{r^4} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \quad ; \quad (\text{III.6.b})$$

$$\nabla^4 u = - \frac{v}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} \quad . \quad (\text{III.6.c})$$

$$\text{Onde } \nabla^2 = \frac{\partial^2 (\dots)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\dots)}{r^2 \partial \theta^2} \quad .$$

Sendo conhecidas nesta forma como as equações de Donnell. A precisão dessas equações é discutida por Kempner²² e Hoff²³. Para efeito de utilização em normas de projeto, as análises desenvolvidas por Hoff et al.²⁸ e Bijlaard⁴³ são as mais aceitas atualmente²⁷. Os primeiros apresentam uma solução das equações de Donnell, para o caso de linhas de carga sobre geratrizes de cascas cilíndricas, que é exposta na seção seguinte. Bijlaard se utiliza de uma modificação dessas equações para obter uma solução para o problema de carregamentos sobre regiões retangulares, como será visto na seção (III.3).

III.2 - CARGAS LOCALIZADAS AO LONGO DE UMA GERATRIZ

O problema de cargas concentradas ao longo de uma geratriz de um cilindro teve um de seus primeiros tratamentos elaborados por Yuan²⁵ que deduziu e resolveu, para a consideração de um cilindro infinito, a equação abaixo:

$$\nabla^8 w + \frac{12(1-\nu^2)}{r^2 t^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^4} = \frac{1}{D} \nabla^4 q \quad (\text{III.7})$$

$$\text{Onde } \nabla^2 = \frac{\partial^2 (\dots)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\dots)}{r^2 \partial \theta^2}.$$

Nesta equação, q representa o carregamento normal a superfície e é função de x e θ . As dificuldades para a integração da equação (III.7) foram solucionadas com uma representação de q , na direção longitudinal do cilindro, por uma integral de Fourier e, na direção circunferencial, por uma série de Fourier. Na

mesma época, Odqvist^{2,6} apresentou uma solução, em forma de séries infinitas, para as deflexões de cilindros finitos sujeitos a determinados carregamentos sobre uma geratriz, representáveis, por séries de Fourier; e, uma solução em forma fechada para as deflexões no caso de cargas concentradas. Para uma situação como a da fig. (III.3), em que o carregamento externo é dado por:

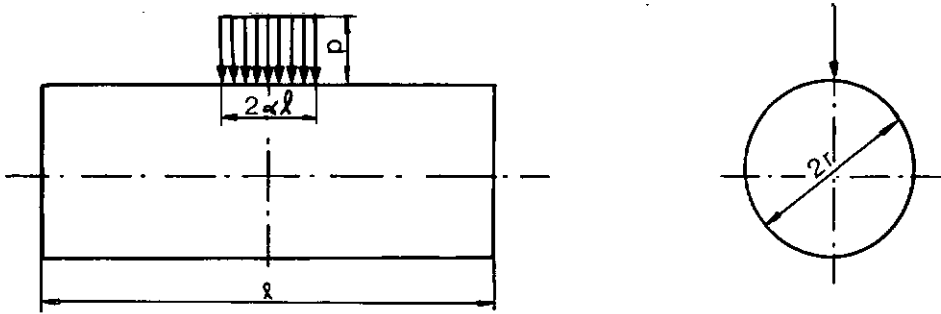


Fig. (III.3): Configuração considerada para a solução de Odqvist

$$p(x) = \sum_{n=2,4,\dots} p_n \cos n\pi x / \ell \quad (\text{III.8})$$

onde

$$p_n = \frac{4}{\pi n} \sin n\pi a$$

A deflexão vertical seria obtida com:

$$w(x,0) = \frac{-\sqrt{2-\nu^2} [12(1-\nu^2)]^{5/8} \ell^{3/2} r^{3/4} p}{\sqrt{2} \pi^{5/2} E h^{9/4}} \sum_{n=2,4,\dots} \frac{\sin n\pi a \cos n\pi x / \ell}{n^2 \sqrt{n}} \quad (\text{III.9})$$

Onde h é a espessura do cilindro e E seu módulo de elasticidade.

No caso de uma força radial concentrada P , no centro da geratriz, Odqvist sugere que se coloque $2\alpha p = P$ e se faça $\alpha \rightarrow 0$. A passagem ao limite é feita em (III.9) e o resultado é:

$$w(0,0) = \frac{-1.689 \sqrt{2 - \sqrt{2}} [12(1-\nu^2)]^{5/8} \ell^{3/2} r^{3/4} P}{2 \pi \sqrt{2\pi} h^{9/4} E} \quad (\text{III.10})$$

Hoff et al²⁸ determinam as expressões das forças e momentos resultantes em um elemento de casca como função dos deslocamentos, utilizando as equações (III.2) e (III.5) e considerando as hipóteses simplificadoras de Donnell, ou seja, eliminar v das expressões para X_θ e $X_{\theta x}$, ignorar a equação (III.1.f) e o efeito de Q_θ em (III.1.b) para obter:

$$N_x = \frac{E t}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu \frac{w}{r} \right] \quad ; \quad (\text{III.11.a})$$

$$N_\theta = \frac{E t}{1-\nu^2} \left[\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r} \right] \quad ; \quad (\text{III.11.b})$$

$$N_{x\theta} = \frac{E t}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad ; \quad (\text{III.11.c})$$

$$M_x = \frac{D}{r} \left[r \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \quad ; \quad (\text{III.11.d})$$

$$M_\theta = \frac{D}{r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu r \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad ; \quad (\text{III.11.e})$$

$$M_{x\theta} = (1-\nu) \frac{D}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \quad . \quad (\text{III.11.f})$$

Utilizando as três últimas equações da sequência acima e as equações (III.1.d) e (III.1.e) obtêm-se:

$$Q_x = \frac{D}{r^2} \left[r^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} \right] \quad ; \quad (\text{III.11.g})$$

$$Q_\theta = \frac{D}{r^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{r \partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} \right] \quad . \quad (\text{III.11.h})$$

Se a força cortante equivalente, $\frac{1}{r} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x}$, correspondente ao torque distribuído, é adicionada a Q_x , em concordância com a sugestão de Kirchhoff, como citado por Hoff²¹, a força cizalhante efetiva total, por unidade de comprimento, será:

$$S_\theta = Q_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} = \frac{D}{r^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + (2-\nu) r \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} \right] \quad . \quad (\text{III.11.i})$$

De forma análoga pode-se proceder para obter S_x , como:

$$S_x = Q_x + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} = \frac{D}{r^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} \right] \quad . \quad (\text{III.11.j})$$

No caso de uma força radial distribuída, na forma $2S \cos nx/r$, sobre a geratriz $\theta = 0$, produzindo deformações simétricas em torno de $x = 0$ e assumindo suportação simples nas extremidades $x = \pm L/2$, considere-se a metade de um cilindro secciona-

do ao longo dessa geratriz. Uma solução que satisfaz às equações (III.6) é da forma:

$$w = A e^{p\theta} \cos \frac{nx}{r} \quad (\text{III.12.a})$$

$$u = B e^{p\theta} \sin \frac{nx}{r} \quad (\text{III.12.b})$$

$$v = C e^{p\theta} \cos \frac{nx}{r} \quad (\text{III.12.c})$$

Onde A e n são reais e B; C e p podem ser complexos.

As condições de contorno provenientes da consideração de suportaço simples são:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v = w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{quando } x = \pm L/2.$$

Com $-\pi \leq \theta \leq \pi$, a solução é assumida como:

$$w_{\text{tot}} = w(\theta) + w(2\pi-\theta) + w(2\pi+\theta) + w(4\pi-\theta) + \dots \quad (\text{III.13.a})$$

$$u_{\text{tot}} = u(\theta) + u(2\pi-\theta) + u(2\pi+\theta) + u(4\pi-\theta) + \dots \quad (\text{III.13.b})$$

$$v_{\text{tot}} = v(\theta) - v(2\pi-\theta) + v(2\pi+\theta) - v(4\pi-\theta) + \dots \quad (\text{III.13.c})$$

Os termos dos somatórios expressos em (III.13) podem ser imaginados como sendo as contribuições provenientes de duas folhas fictícias de comprimento L , cada uma começando em $\theta = 0$ e envolvendo-se sobre si mesma com raio r por um número infinito de vezes, uma envolvendo-se num sentido e a outra no sentido oposto.

As condições de contorno em $\theta = 0$ são:

a) Por razões de simetria,

$$\left. \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)_{\theta=0} = 0 \quad ; \quad (\text{III.14.a})$$

b) Para eliminar falhas causadas por deslocamentos circunferenciais

$$v)_{\theta=0} = 0 \quad ; \quad (\text{III.14.b})$$

c) Na ausência de forças tangenciais $N_{x\theta}$ na extremidade $\theta = 0$ das folhas

$$N_{x\theta})_{\theta=0} = 0 \quad ; \quad (\text{III.14.c})$$

d) E para levar em conta a força radial,

$$S_{\theta})_{\theta=0} = S \cos n \frac{x}{r} \quad .. \quad (\text{III.14.d})$$

Substituindo as expressões (III.12) em (III.6) e levando-se em conta as condições de contorno, pode-se chegar²⁸ a:

$$w = \frac{Sr^2}{4\lambda nD} \left(\frac{e^{-\alpha_1 \theta}}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} [-(\alpha_1 - \beta_1) \cos \beta_1 \theta + (\alpha_1 + \beta_1) \sin \beta_1 \theta] + \right. \\ \left. + \frac{e^{-\alpha_2 \theta}}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} [(\alpha_2 + \beta_2) \cos \beta_2 \theta + (\alpha_2 - \beta_2) \sin \beta_2 \theta] \right) \cos n x/r \quad (\text{III.15})$$

onde

$$\lambda^4 = 3(1-\nu^2)(r/t)^2$$

$$\beta_1 = 1/2(n\lambda/\alpha_1);$$

$$\alpha_1^2 = (n/2) \{ (n+\lambda) + [(n+\lambda)^2 + \lambda^2]^{1/2} \};$$

$$\beta_2 = 1/2(n\lambda/\alpha_2);$$

$$\alpha_2^2 = (n/2) \{ (n-\lambda) + [(n-\lambda)^2 + \lambda^2]^{1/2} \}.$$

Expressões análogas podem ser obtidas para u e v .

Esta solução pode ser usada considerando, por exemplo, uma linha de carga Q aplicada uniformemente entre $x = \pm x_1$, fig. (III.4), ao longo de parte da geratriz $\theta = 0$.

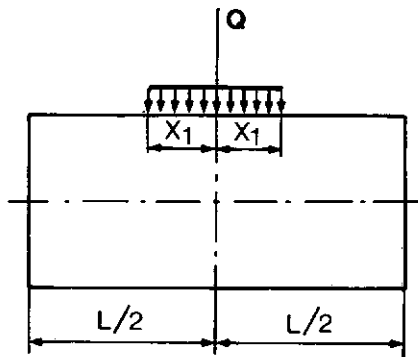


Fig. (III.4): Carregamento Q , distribuído uniformemente entre $x = \pm x_1$

Este carregamento pode ser expresso na forma de uma série de Fourier,

$$q = \frac{Q}{2x_1} = \sum_{m=1,3,5} \frac{2Q}{m\pi x_1} \sin(m\pi \frac{x_1}{L}) \cos(m\pi \frac{x}{L}) . \quad (\text{III.16})$$

Logo, para qualquer valor de m ,

$$S = (Q/m\pi x_1) \sin(m\pi x_1/L) , \quad (\text{III.17})$$

visto que na dedução de (III.15) o carregamento radial era assumido na forma $2S \cos nx/r$. Assim, as deflexões devidas a este carregamento, correspondentes a um inteiro m , são conhecidas desde que $n = m\pi r/L$. Outros casos, como o de um momento longitudinal; um momento circunferencial e outros tipos de carregamento sobre geratrizes, são discutidos por Gill²⁰.

Um fato importante a se notar aqui é que distintamente da forma com que Yuan trata o problema, ver equação (III.7), considerando explicitamente o carregamento externo q , Hoff et al²⁸ consideram-no admitindo uma determinada condição de contorno em termos de esforços S_x ou S_θ ao longo da geratriz carregada.

III.3 - CARREGAMENTOS SOBRE ÁREAS RETANGULARES

As tensões e deformações causadas por um carregamento distribuído sobre uma região retangular podem ser obtidas por integração direta dos resultados da seção (III.2). Este procedi-

mento foi adotado para obtenção dos resultados que aparecem no Apêndice G da British Standard²⁹. Outro método é o que foi desenvolvido por Bijlaard⁴³, utilizando uma modificação das equações de Donnell, como segue:

$$\nabla^8 w + \frac{12(1-\nu^2)}{r^2 t^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{2\partial^6 w}{r^6 \partial \theta^6} + (6+\nu-\nu^2) \frac{\partial^6 w}{r^2 \partial x^4 \partial \theta^2} + (7+\nu) \frac{\partial^6 w}{r^4 \partial x^2 \partial \theta^4} \right] = \frac{1}{D} \nabla^4 Z \quad (\text{III.18.a})$$

$$-r\nabla^4 u = \frac{\nu \partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 w}{r^2 \partial x \partial \theta^2} + \frac{(1+\nu) t^2}{(1-\nu) 12r^2} \left(\frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial \theta^2} + \frac{\partial^5 w}{r^2 \partial x \partial \theta^4} \right) \quad (\text{III.18.b})$$

$$-r\nabla^4 v = (2+\nu) \frac{\partial^3 w}{r \partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 w}{r^3 \partial \theta^3} - \frac{t^2}{12r^2} \left(\frac{2r}{(1-\nu)} \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial \theta} + \frac{(3-\nu)}{(1-\nu)r} \cdot \frac{\partial^5 w}{\partial x^2 \partial \theta^3} + \frac{\partial^5 w}{r^3 \partial x^2 \partial \theta^3} \right) \quad (\text{III.18.c})$$

Onde Z é a carga normal à superfície, positiva quando voltada para o exterior, e representada pela série:

$$Z = \sum \sum Z_{mn} \cos m \theta \sin \frac{\Lambda}{r} x \quad (\text{III.19})$$

onde $\Lambda = \frac{n\pi r}{\ell}$ e m e n são inteiros.

Para uma carga radial a solução das equações (III.18) é obtida expressando-se as deformações da mesma forma:

$$w = \sum \sum w_{mn} \cos m \theta \sin \frac{\lambda x}{r} \quad (\text{III.20.a})$$

$$u = \sum \sum u_{mn} \cos m \theta \sin \frac{\lambda x}{r} \quad (\text{III.20.b})$$

$$v = \sum \sum v_{mn} \sin m \theta \sin \frac{\lambda x}{r} \quad (\text{III.20.c})$$

Considerando-se o cilindro como simplesmente suportado nas extremidades, com a substituição da equação (III.20.a) em (III.18.a) chega-se à expressão para w_{mn} em função de Z_{mn} :

$$w_{mn} = \psi_{mn} Z_{mn} \frac{\ell^4}{2D} \quad (\text{III.21})$$

Onde:

$$\begin{aligned} \psi_{mn} = & 2(m^2 \alpha^2 + n^2 \pi^2)^2 / [(m^2 \alpha^2 + n^2 \pi^2)^4 + (1-\nu^2) 12n^4 \pi^4 \alpha^4 \gamma^2 - \\ & - m^2 \alpha^4 [2m^4 \alpha^4 + (6+\nu-\nu^2)n^4 \pi^4 + (7+\nu)m^2 \alpha^2 n^2 \pi^2]] ; \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

$$\alpha = \frac{\ell}{r} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{r}{t} .$$

Assim,

$$w = \frac{\ell^4}{2D} \sum \sum \psi_{mn} Z_{mn} \cos m \theta \sin \frac{\lambda x}{r} \quad (\text{III.23})$$

Com expressões similares para u e v , o que significa que w pode ser avaliado em qualquer ponto (x, θ) . Como as forças resultantes por unidade de comprimento podem ser calculados com o conhecimento dos deslocamentos, o problema está basicamente resolvido, restando apenas a obtenção de expressões para Z_{mn} que possam representar adequadamente o carregamento imposto.

III.4 - CONSIDERAÇÕES SOBRE OS MÉTODOS DE ANÁLISE DE CARGAS LOCALIZADAS E ALGUNS RESULTADOS ADICIONAIS

O tratamento analítico do problema não atinge o ponto de maior interesse para o presente trabalho que são as deflexões (e consequentemente a rigidez) de um vaso cilíndrico devidas a um carregamento transmitido através de uma conexão bocal-vaso. O Apêndice G da British Standard²⁹ recomenda nestes casos que se determine uma área flexível quadrada equivalente, sendo o comprimento do lado, $2C$, desta área dado por:

$$2C = 1.70 r_0 \quad (\text{III.23})$$

onde r_0 = raio médio do bocal ou da conexão.

E se fazamos cálculos considerando esta área de carregamento. O procedimento é questionável, tendo em vista aspectos tais como os de que a forma da conexão equivalente é distinta; o tratamento analítico não considera perfurações na casca ou ainda a não consideração de extremidades fechadas do cilindro e outras condições de suportaçoão.

Com relação às tensões, testes em laboratório conduzidos por Schoessow e Kooistra³⁰, para uma conexão tubo-vaso, determinaram valores na periferia da seção de conexão que são grossieramente iguais àqueles do centro de uma área quadrada equivalente, porém quanto a rigidez nada se pôde afirmar.

Além disso, as extremidades dos vasos nos tratamentos analíticos são assumidas como simplesmente apoiadas, condição esta que na maioria das vezes não irá se verificar em instalações industriais de vasos cilíndricos.

O manual da M. W. Kellogg Company¹⁴ apresenta uma expressão para cálculo da rotação de um bocal devida a momentos longitudinais, como segue:

$$\phi = \frac{M}{4.88E} \left[\frac{R}{r_m^2 t} \right]^{3/2} \quad (\text{III.24})$$

onde:

ϕ - rotação angular, radianos;

M - momento atuante no bocal;

r_m - raio médio do bocal;

t - espessura da parede do vaso incluindo reforço;

E - módulo de elasticidade do material do vaso.

Esta solução se baseou no estudo da flexão de vigas em fundações elásticas.

Quando o momento atua na direção circunferencial, a mesma referência indica que testes foram feitos mostrando que a flexibilidade pode ser muitas vezes maior.

Billimoria et al.⁹ apresentam curvas para determinação das rigidezes a rotações circunferenciais e longitudinais e a deslocamentos radiais de bocais de tanques. Estas curvas foram obtidas com um método computacional que resolve as equações básicas das cascas, convertendo-as em oito equações diferenciais ordinárias. A carga localizada é expressa como uma soma de várias cargas separadas (coeficientes de Fourier para cada termo harmônico das séries) e a análise é então desenvolvida para cada harmônico. Desafortunadamente, a faixa de aplicabilidade deste trabalho se restringe a grandes tanques de estocagem com:

$$\gamma = \frac{r}{t} \geq 300 \quad (\text{III.25.a})$$

onde: r - raio do vaso

t - espessura de parede do vaso

e,

$$\frac{L}{2a} \leq 1.5 \quad (\text{III.25.b})$$

Onde L - altura da linha de centro da conexão

a - raio médio da conexão

O que significa que para a maioria dos vasos de pressão os resultados deste trabalho não se aplicariam. Este fato pode ser verificado se for tomada como exemplo a British Standard²⁹. A faixa de aplicabilidade desta norma é limitada superiormente por $\gamma = 300$, γ definido como em (III.25.a).

Roark³³ apresenta uma fórmula empírica para cálculo da deflexão radial de um vaso com as extremidades fechadas e simplesmente apoiado, devida a uma carga concentrada P , em uma pequena área, localizada no meio do vão, como a seguir:

$$\delta = \frac{P}{E t} \left[0.48 \left(\frac{L}{R} \right)^{1/2} \left(\frac{R}{t} \right)^{1.22} \right] \quad (\text{III.26})$$

onde E - módulo de elasticidade;

L - comprimento do vaso;

R - raio médio do vaso;

t - espessura;

δ - deflexão.

Com vistas a obter resultados mais realísticos da rigidez de bocais de vasos para uma gama de valores de parâmetros que definam a geometria vaso-bocal, incluídos nas faixas mais co-

munis de utilização, um modelo de elementos finitos foi aplicado e seus resultados apresentados no capítulo seguinte.

CAPÍTULO IV

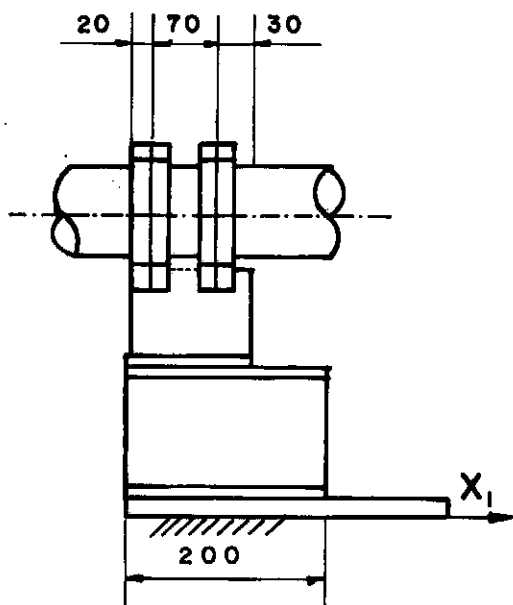
DETERMINAÇÃO DA RIGIDEZ DE APOIOS REAIS

Na seção (IV.1) serão considerados dois modelos de suportes estruturais. A seção (IV.2) se dedica ao problema das conexões em vasos cilíndricos. A matriz de rigidez condensada nos seis g.l. do ponto de união com um sistema de tubulações é então obtida com o procedimento descrito na seção (II.4).

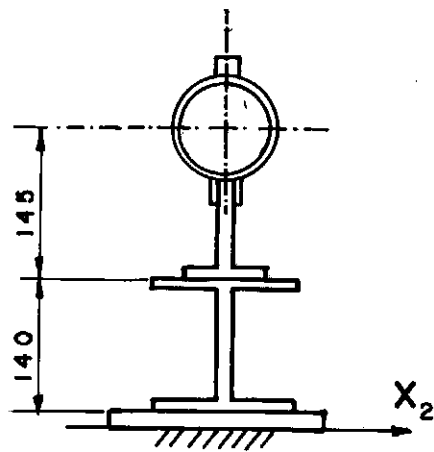
O programa STARDYNE³¹ foi empregado nesta análise.

IV.1 - MATRIZ DE RIGIDEZ DOS SUPORTES

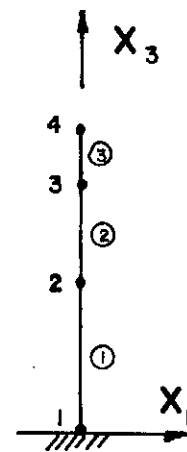
Os dois suportes considerados nesta seção, com utilização prevista em diversas usinas nucleares¹¹, são denominados, para fins práticos, de A5-H77 e A6-H201. O primeiro se constitui de um perfil "I 140 x 200", um perfil "T110" e duas braçadeiras. As dimensões básicas estão apresentadas nas figuras (IV.1.a) e (IV.1.b). O segundo se constitui de um perfil "I 160" formando um pórtico; e, soldado sobre este, um perfil "U 130". Além dos elementos já descritos, este suporte tem, ao alto, duas braçadeiras. As dimensões principais deste suporte estão nas figuras (IV.2.a) e (IV.2.b).



(a)



(b)



(c)

Fig. (IV.1): Geometria e modelo de elementos finitos do suporte A5-H77

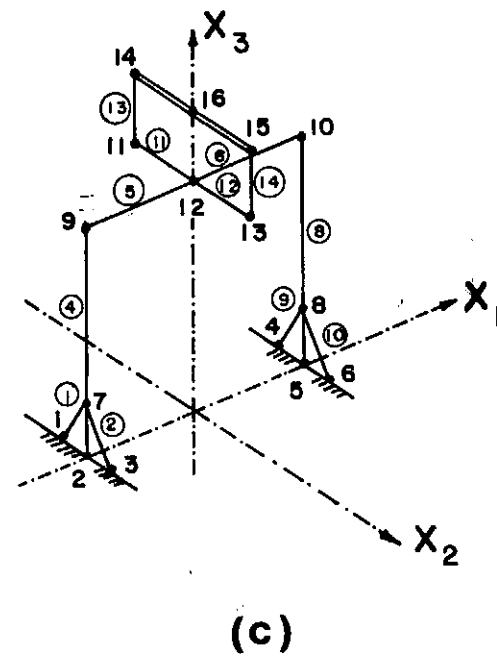
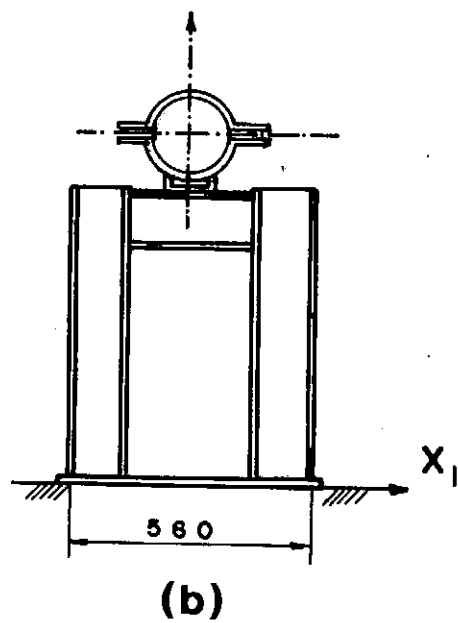
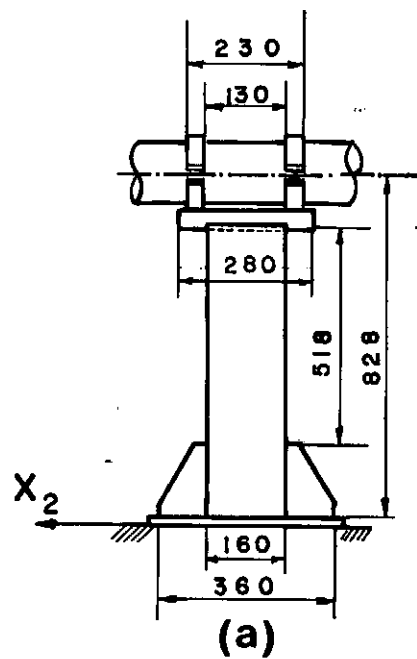


Fig. (IV.2): Geometria e modelo de elementos finitos do suporte A6-H201

Os suportes serão modelados por elementos finitos tridimensionais. Para isto o suporte A5-H77 é dividido em 3 elementos de viga: ① ; ② e ③ . Estes elementos estão unidos nos pontos nodais 1; 2; 3 e 4, como pode ser visto na fig. (IV.1.c)), juntamente com os eixos globais do conjunto. O suporte A6-H201 é dividido em 14 vigas: ① ; ② ; ③ ; ...; ⑬ e ⑭ , unidas nos pontos nodais 1; 2; 3; ...; 14; 15 e 16. Um elemento de rigidez infinita, que une os pontos 14, 15 e 16 e também considerado no modelo. Os eixos globais e modelo de elementos finitos são apresentados na fig. (IV.2.c).

Os elementos de viga empregados levam em sua formulação as hipóteses seguintes³¹ (teoria de Timoshenko):

- a) O material é elástico, linear, homogêneo e isotrópico;
- b) Só ocorrem pequenas deformações;
- c) Seções planas permanecem planas;
- d) Distorções por cisalhamento na flexão são incluídas. Para isto um fator de forma de cisalhamento é considerado. Este fator, quando multiplicado pela área da seção transversal da viga, resultará em uma área efetiva de cisalhamento;

Assim,

$$A_{\text{efecc.}} = SF \cdot A \quad (\text{IV.1})$$

onde: A_{efecc} , - área efetiva de cisalhamento

SF - fator de forma de cisalhamento

A - área da seção transversal da viga

Adotou-se um valor de $SF = 0.85$, seguindo as recomendações indicadas por Roark³³ e pelo próprio STARDYNE³¹.

e) Propriedades geométricas são constantes ao longo do comprimento,

f) Os nós têm 6 g.l.

Os módulos de elasticidade e poisson tomados são, respectivamente, $E = 1.96 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ e $\nu = 0.3$.

A matriz de rigidez condensada no ponto nodal 4, da estrutura A5-H77, e aquela da estrutura A6-H201, condensada no ponto nodal 16, são apresentadas, respectivamente, nas figuras (IV.3.a) e (IV.3.b). É importante notar-se aqui, que os suportes estruturais têm forma extremamente diversificada, não permitindo portanto que se obtenha resultados mais gerais sobre a rigidez dos mesmos.

Este fato já não ocorre com as conexões de bocais em vasos cilíndricos, o que é explorado na seção seguinte.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	9.41E+04					
x_2		2.99E+02				
x_3			6.75E+05			
x_4		3.25E+04		5.77E+06		
x_5	-8.03E+06				1.51E+09	
x_6						3.31E+06

Fig. (IV.3.a): Matriz de rigidez do suporte A5-H77

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	2.52E+03					
x_2		3.20E+04				
x_3			3.75E+05			
x_4		7.34E+06		1.90E+09		
x_5	-3.17E+05				5.33E+07	
x_6						2.44E+07

Fig. (IV.3.b): Matriz de rigidez do suporte A6-H201

Unidades: Forças em (N) e deslocamentos em (mm)

IV.2 - O PROBLEMA DA RIGIDEZ DE VASOS CILÍNDRICOS

IV.2.1 - Estudo do Modelo Básico e Definições Gerais

A configuração adotada para o estudo do problema é apresentada na figura (IV.4).

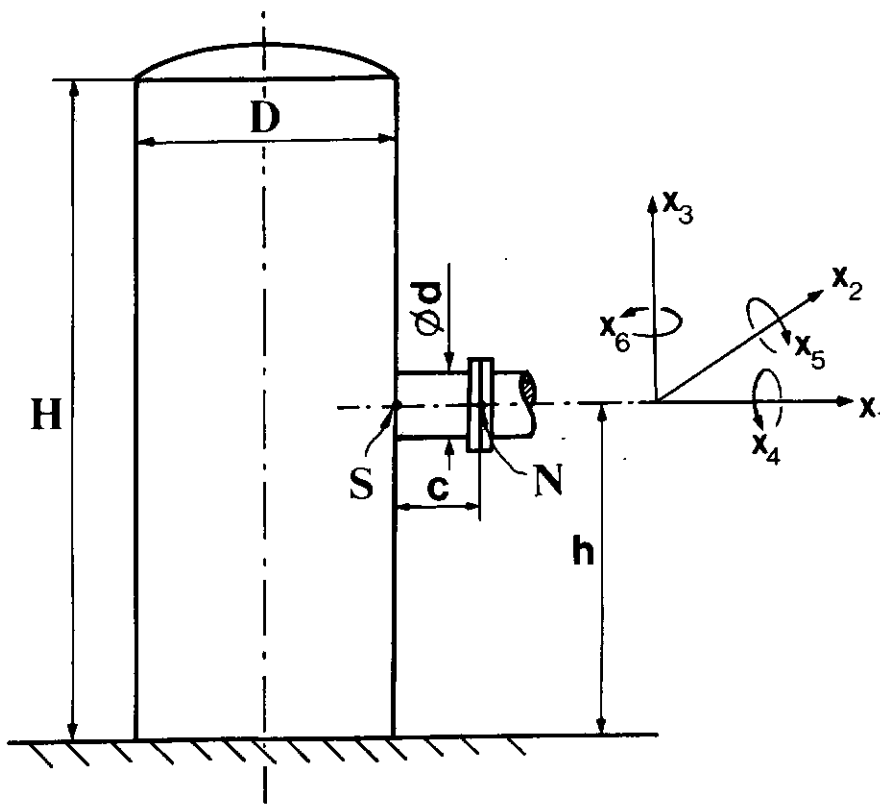


Fig. (IV.4): Geometria da conexão vaso-bocal e condições de contorno adotadas.

Consiste de um vaso com altura H , diâmetro D , espessura de parede t , engastado em uma extremidade e fechado com

uma calota esférica na outra, ao qual se solda, a uma altura h , uma conexão flangeada com diâmetro médio d .

A distância da superfície, de encaixe do flange até a superfície média do vaso é c . O sistema de eixos globais, que será posteriormente considerado no modelo de elementos finitos, está na mesma figura. A possibilidade de expressar esta configuração básica sob a forma de um número resumido de parâmetros foi considerada, visto que haveria possibilidade de extrapolar os resultados obtidos aqui a outros vasos que, por exemplo, tivessem suas dimensões fornecidas em sistema de unidades distinto. Deste modo, definem-se quatro parâmetros adimensionais como:

$$\alpha = \frac{t}{D} \times 1000 \quad (\text{IV.2.a})$$

$$\beta = \frac{d}{D} \times 100 \quad (\text{IV.2.b})$$

$$\gamma = \frac{h}{H} \times 100 \quad (\text{IV.2.c})$$

$$\delta = \frac{H}{D} \quad (\text{IV.2.d})$$

A não inclusão da distância c em nenhum dos parâmetros adimensionais será justificada quando da apresentação do modelo de elementos finitos.

Para conseguir uma base realística no início da investigação, foi considerado um vaso com utilização prevista na usina de Angra 2³⁴, denominado "Tanque de Água de Selagem"; porém, com vistas aos objetivos que se propõe, ao tomá-lo como base para o estudo, daqui em diante este será chamado simplesmente de "vaso médio" ou vaso "S₀". As razões para assim fazê-lo serão logo percebidos (seção IV.2.2). Para este vaso tem-se (todas as dimensões dadas em mm):

$D_0 = 800$, $H_0 = 2000$, $t_0 = 6$, $d_0 = 72$, $h_0 = 1000$, $c_0 = 50$. A calota superior tem uma altura de 100 mm.

Deste modo, os parâmetros adimensionais assumem os valores:

$$\alpha = 7.5 \text{ , } \beta = 9.0 \text{ , } \gamma = 50 \text{ , } \delta = 2.5$$

O modelo de elementos finitos de placas planas, triangulares e retangulares, utilizado na análise, está apresentado na figura (IV.5).

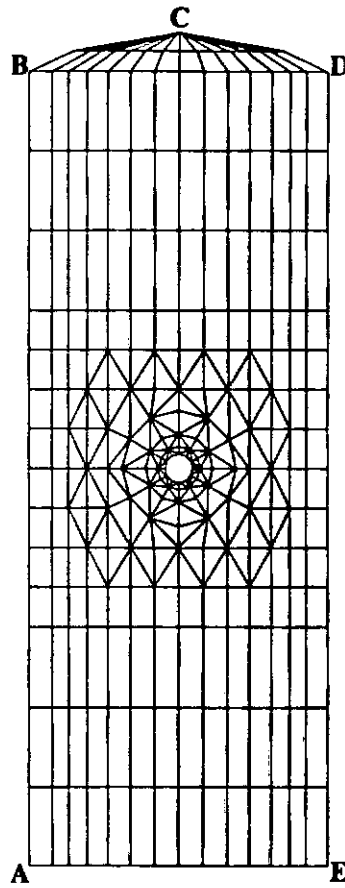


Fig. (IV.5): Modelo de elementos finitos do vaso S_0

O bocal e o flange foram modelados como um conjunto de 12 barras infinitamente rígidas, não mostradas na fig. (IV.5), unindo os pontos nodais existentes no contorno de conexão vaso-bocal, com um único ponto N, localizado na linha de centro do tubo, como mostrado na fig. (IV.4).

Este procedimento é justificado se for observado que uma modelagem tradicional, em elementos finitos, do bocal, com sua espessura de parede sensivelmente superior à do vaso a que está conectado, possivelmente traria problemas de mal condi-

cionamento das matrizes de rigidez.

Foi então calculada a matriz de rigidez condensada nos 6 g.l. do ponto N.

A não inclusão do parâmetro c , em forma adimensional, pode ser agora justificada, levando-se em consideração o conjunto bocal-flange como um corpo rígido. O conhecimento da matriz de rigidez em um ponto N, localizado a uma distância c , genérica, permite o conhecimento desta matriz para qualquer valor de c , via utilização da "matriz de transferência de movimentos de corpo rígido"³⁵, que pode ser determinada, em uma forma simplificada, para a situação particular descrita a seguir:

Considere-se que, por exemplo, tendo a matriz em N, deseja-se obter a matriz em S, fig. (IV.4), ou vice-versa.

A equação (II.1) relativa aos pontos N e S é:

$$[K]_S \{\delta\}_S = \{P\}_S \quad (\text{IV.3.a})$$

$$[K]_N \{\delta\}_N = \{P\}_N \quad (\text{IV.3.b})$$

Os vetores deslocamentos $\{\delta\}$ podem ser particionados como segue:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_T\} \\ \{\delta_R\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}, \quad (\text{IV.4})$$

onde os três primeiros elementos são relativos à translação e os três últimos à rotação.

Considerando que S e N são pontos de um corpo rígido, separados por uma distância c , é válido afirmar que:

$$\{\delta_R\}_S = \{\delta_R\}_N \quad (\text{IV.5.a})$$

e

$$\begin{aligned} \{\delta_T\}_S &= \{\delta_T\}_N + \{\delta_R\}_N \times \begin{Bmatrix} -c \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \\ &= \{\delta_T\}_N + \begin{Bmatrix} 0 \\ -c\delta_6 \\ c\delta_5 \end{Bmatrix}; \quad (\text{IV.5.b}) \end{aligned}$$

ou, em forma matricial:

$$\{\delta\}_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -c \\ \vdots & & 1 & 0 & c & 0 \\ \vdots & & & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \{\delta\}_N ,$$

que pode ser reescrita mais simplesmente como:

$$\{\delta\}_S = [T^{SN}] \{\delta\}_N , \quad (\text{IV.6})$$

onde $[T^{SN}]$ é a matriz de transferência de movimentos de corpo rígido de S para N.

Para as forças, um procedimento análogo iria conduzir a:

$$\{P\}_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & -c & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{P\}_N = [T^{SN}]^{-T} \{P\}_N . \quad (\text{IV.7})$$

Substituindo (IV.6) e (IV.7) em (IV.3.a) vem:

$$[K]_S [T^{SN}] \{\delta\}_n = [T^{SN}]^{-T} \{P\}_n ;$$

ou,

$$[T^{SN}]^T [K]_S [T^{SN}] \{\delta\}_n = \{P\}_n . \quad (IV.8)$$

Comparando (IV.8) com (IV.3.b), tem-se:

$$[K]_N = [T^{SN}]^T [K]_S [T^{SN}] \quad (IV.9)$$

e, conseqüentemente:

$$[K]_S = [T^{SN}]^{-T} [K]_N [T^{SN}]^{-1} . \quad (IV.10)$$

Com estas expressões é possível obter a matriz de rigidez em um ponto N, localizado a uma distância c de S, sobre a linha de centro da conexão, ou vice-versa.

Voltando então ao modelo de elementos finitos, as hipóteses admitidas na formulação dos elementos de placa plana, triangulares e retangulares, que o constituem são (Kirchoff-Love):

a) A placa é delgada.

b) O material é elástico, linear, isotrópico e homogêneo.

c) Só ocorrem pequenas deformações.

- d) Tensões normais ao plano dos elementos são desprezíveis.
- e) Os nós nas extremidades tem, cada um, dois g.l. de rotação (no plano do elemento) e três g.l. de translação.
- f) A normal a superfície média da casca permanece normal e não muda seu comprimento durante a deformação.

O material é tomado com módulo de elasticidade $E = 1.96 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$, e de Poisson, $\nu = 0.3$.

Para o vaso médio, a matriz de rigidez está apresentada abaixo, ao lado dos parâmetros considerados, adimensionais ou não, e da orientação desta matriz relativa aos eixos globais X_i , $1 \leq i \leq 6$. As unidades a serem consideradas para esta matriz, bem como para todas as outras matrizes a serem apresentadas, a não ser que explicitamente indicado em contrário, corresponderão a: forças em N, momentos em N.mm e deslocamentos em mm. Além disso, devido a simetria da matriz de rigidez, somente a metade simétrica inferior desta é apresentada.

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 7.50$		$\beta = 9.00$		$\gamma = 50.00$		$\delta = 2.50$
D = 800		H = 2000		t = 6		c = 50
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1.40E+04					
x_2		1.18E+05				
x_3	1.27E+04		6.78E+05			
x_4		3.00E+06		6.93E+09		
x_5	6.28E+05		3.55E+07		2.04E+09	
x_6		-4.41E+06		-1.23E+08		2.32E+08

Fig. (IV.6): Matriz de rigidez do vaso S_0

É importante notar neste momento, que, apesar de apresentada, a rigidez relativa ao eixo x_4 do vaso, termo K_{44} da matriz da fig. (IV.6), esta e seus acoplamentos não possuem confiabilidade, visto que os elementos finitos utilizados não incluem rotações normais as suas superfícies. O surgimento deste valor é justificado pela representação facetada da casca, produzindo um g.l. nesta direção devido as projeções dos g.l. de rotação nos planos dos elementos que a constituem, sobre os eixos coordenados globais.

Uma investigação separada foi desenvolvida para determinar a participação relativa na matriz de rigidez de S_0 (fig. IV.6), dos efeitos locais de casca e daqueles provenientes da consideração do vaso como uma viga.

O efeito de viga foi determinado com auxílio de um modelo simples, como mostrado na fig. (IV.7).

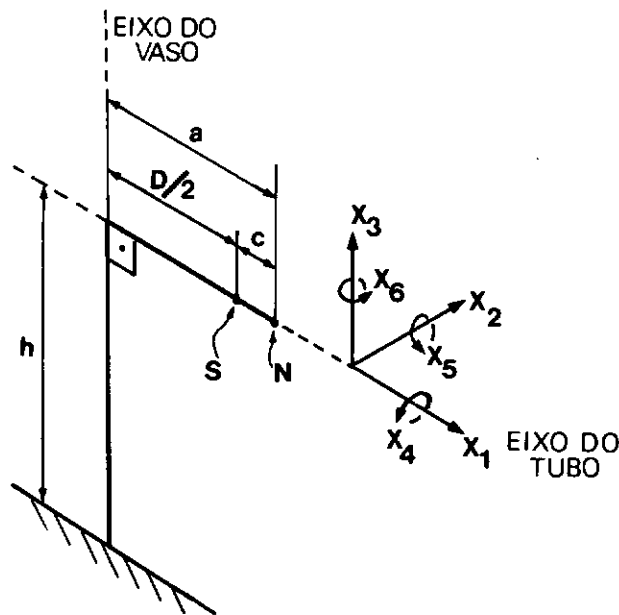


Fig. (IV.7): Modelo de viga com módulo de seção igual ao do vaso médio

O nó N (onde se condensou a matriz de rigidez) é tomado com uma excentricidade $a = D/2 + c$ sobre um braço infinitamente rígido, perpendicular a uma viga de altura h_0 e propriedades de seção como S_0 . Para avaliação do efeito local de casca, o modelo de elementos finitos original foi engastado ao longo da linha ABCDEA, fig. (IV.5).

Obtidas as matrizes de rigidez e, considerando que os efeitos local e de viga estão em série, ou seja:

$$[K]_{\text{total}}^{-1} = [K]_{\text{local}}^{-1} + [K]_{\text{viga}}^{-1} \quad , \quad (\text{IV.11})$$

a equação (IV.11) pode ser reescrita na forma:

$$[A]_{\text{total}} = [A]_{\text{local}} + [A]_{\text{viga}} \quad . \quad (\text{IV.12})$$

Onde as matrizes $[A]$, são as matrizes de flexibilidade correspondentes às inversões indicadas em (IV.11).

Efetuada estas inversões $[A]_{\text{total}}$ foi obtida com a soma de $[A]_{\text{local}}$ e $[A]_{\text{viga}}$, sendo apresentada abaixo, equação (IV.13), na forma da equação (IV.12).

Assim, é possível observar a participação relativa na construção da matriz de flexibilidade $[A]_{\text{total}}$ e, conseqüentemente, na matriz de rigidez $[K]_{\text{total}}$, dos efeitos viga e local, visto que sua formação corresponde a soma direta dos a_{ij} das matrizes $[A]_{\text{local}}$ e $[A]_{\text{viga}}$.

Nota-se portanto que, a não ser por certos acoplamentos, coeficientes a_{31} e a_{42} da matriz $[A]_{\text{total}}$, esta corresponde muito aproximadamente a matriz $[A]_{\text{local}}$; consequência de serem os coeficientes de $[A]_{\text{viga}}$ muito pequenos.

$[A]_{\text{total}}$						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	6.67E-05					
x_2		3.08E-05				
x_3	-1.44E-06		1.63E-05			
x_4		-2.46E-09		1.46E-10		
x_5	9.69E-09		-2.76E-07		5.26E-09	
x_6		5.51E-07		1.73E-11		1.46E-08

=

$[A]_{\text{local}}$						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	6.33E-05					
x_2		2.63E-05				
x_3	-4.89E-07		1.51E-05			
x_4		-3.43E-10		1.42E-10		
x_5	7.57E-09		-2.74E-07		5.26E-09	
x_6		5.49E-07		1.73E-11		1.46E-08

+

+

$[A]_{\text{viga}}$						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	3.41E-06					
x_2		4.53E-06				
x_3	-9.52E-07		1.19E-06			
x_4		-2.12E-09		4.23E-12		
x_5	2.12E-09		-1.90E-09		4.23E-12	
x_6		2.47E-09		-5.74E-16		5.48E-12

(IV-13)

Os resultados obtidos com a inversão de $[A]_{\text{total}}$, ou seja $[K]_{\text{total}}$, e sua comparação, fig. (IV.8), com a matriz $[K]_{S_0}$, para o vaso S_0 , repetida nesta figura para facilitar a comparação, mostram que a hipótese expressa na equação (IV.11), de que os efeitos de viga e local estavam em série, era aceitável.

$[K]_{S_0}$						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1.40E+04					
x_2		1.18E+05				
x_3	1.27E+04		6.78E+05			
x_4		3.00E+06		6.93E+09		
x_5	6.28E+05		3.55E+07		2.04E+09	
x_6		-4.41E+06		-1.23E+08		2.32E+08

$[K]_{\text{total}}$						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1.51E+04					
x_2		1.01E+05				
x_3	7.74E+03		5.54E+05			
x_4		2.15E+06		6.90E+09		
x_5	3.78E+05		2.91E+07		1.71E+09	
x_6		-3.80E+06		-8.91E+07		2.12E+08

Fig. (IV.8): Comparação da matriz do vaso S_0 correta com a matriz superposição dos efeitos locais e de viga

IV.2.2 - Variação dos Parâmetros do Vaso

Para se determinar os efeitos da variação dos parâmetros adimensionais característicos, definidos nas equações (IV.2), sobre a rigidez do vaso, variações individuais de cada um dos parâmetros, até valores extremos, em torno dos valores médios correspondentes ao vaso S_0 , foram efetuadas. É importante ressaltar que a cada variação de um dos parâmetros, todos os outros foram mantidos fixos no valor médio.

Os valores extremos adotados, máximos e mínimos, para cada um dos parâmetros adimensionais, estão apresentados na Tabela (IV.1).

	VALOR DOS PARÂMETROS		
	MÍNIMO	MÉDIO	MÁXIMO
α	2.50	7.50	15.00
β	3.75	9.00	13.50
γ	30.00	50.00	70.00
δ	1.25	2.50	5.00

Tab. (IV.1): Valores utilizados dos parâmetros adimensionais

Nos modelos de elementos finitos, gerados para efetuar as variações indicadas na Tab. (IV.1), o diâmetro D do vaso, bem como a altura da calota superior e a distância c entre S e N , como na fig. (IV.4), foram mantidos fixos. A manutenção de D em um valor fixo teve um objetivo definido, que será visto

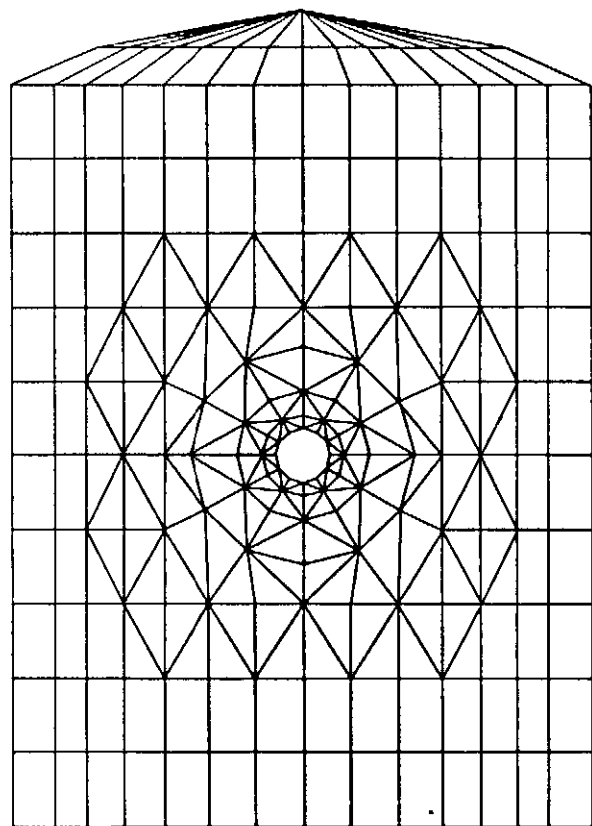
mais adiante.

As variações foram então obtidas com a mudança de outras dimensões do vaso médio.

As figuras obtidas com o computador, correspondentes às malhas geradas, são apresentadas a seguir. As diferenças de diâmetro ocorrem por efeito de escala. As figuras (IV.9) e (IV.10) apresentam os modelos correspondentes aos vasos de menor e maior esbeltez, $\delta = H/D = 1.25$ e $\delta = 5.00$.

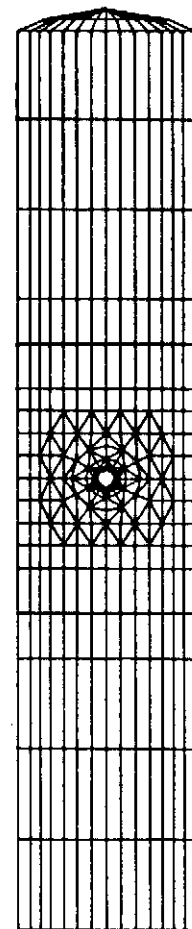
As malhas geradas para a variação do parâmetro $\beta = \frac{d}{D} \times 100$, estão apresentadas na figura (IV.11), juntamente com a malha correspondente ao vaso médio, para efeito de comparação. Só foi mostrada a região na vizinhança do furo, para melhor visualização.

Os modelos que permitiram a variação da altura de fixação, parâmetro $\gamma = h/H \times 100$, estão apresentados nas figuras (IV.12) e (IV.13).



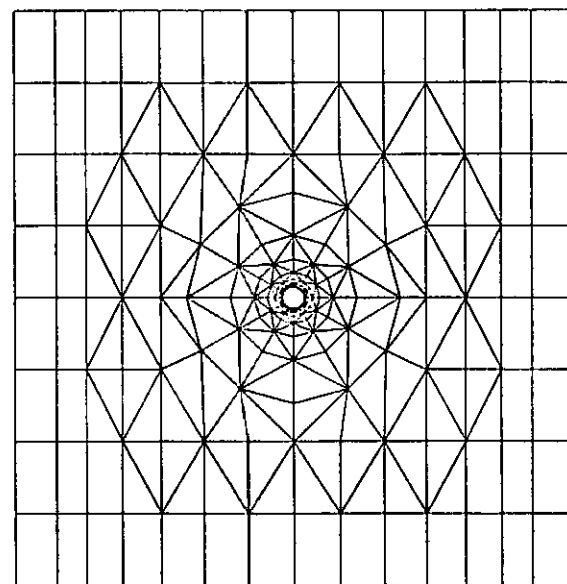
$$\delta = 1.25$$

Fig. (IV.9): Valor mínimo do parâmetro δ

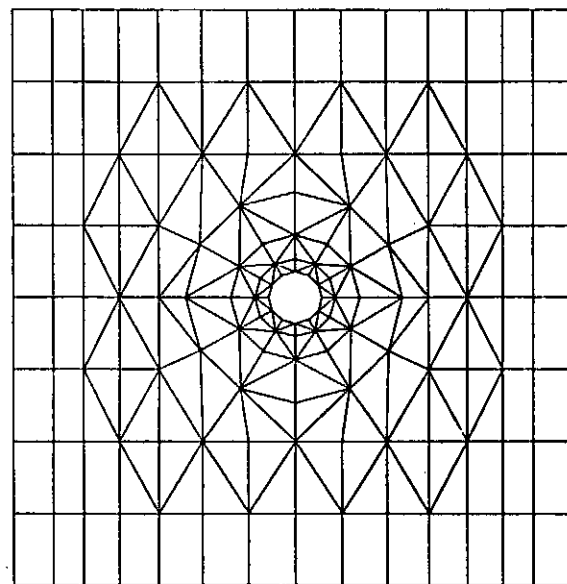


$$\delta = 5.00$$

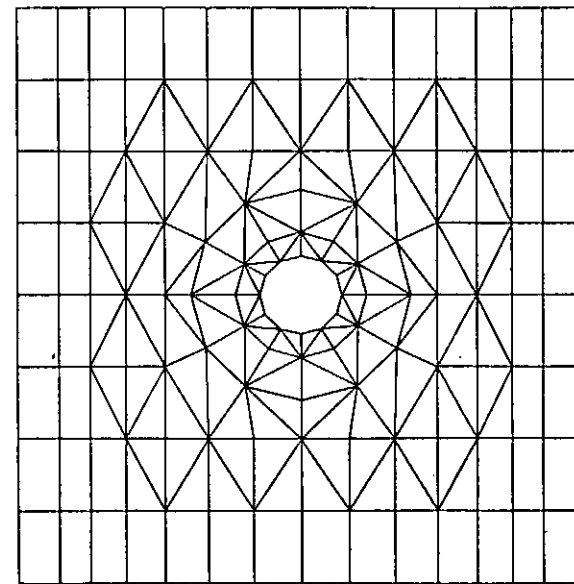
Fig. (IV.10): Valor máximo do parâmetro δ



$\beta = 3.75$

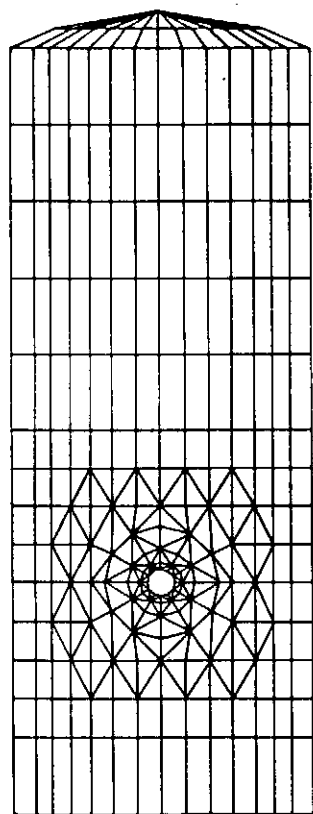


$\beta = 9.00$



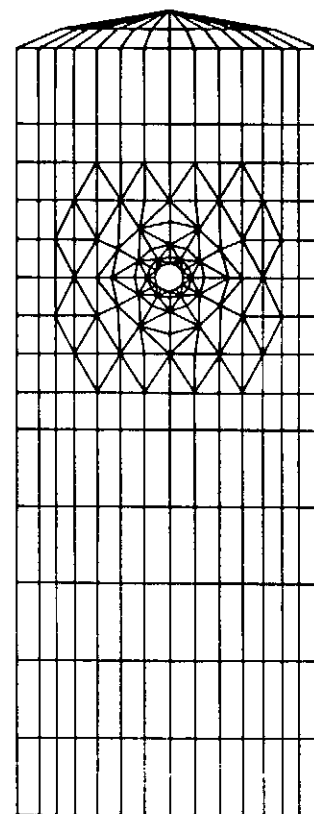
$\beta = 13.50$

Fig. (IV.11): Vista da malha central com variação do parâmetro β



$\gamma = 30$

Fig. (IV.12): Valor mínimo do parâmetro γ



$\gamma = 70$

Fig. (IV.13): Valor máximo do parâmetro γ

As matrizes correspondentes a todas as variações estão apresentadas no Apend.I, que inclui as dimensões efetivamente utilizadas. Observação destas matrizes, permite concluir que os valores máximos dos parâmetros α e β e mínimos dos parâmetros γ e δ correspondem a um aumento na rigidez; obviamente, uma redução na rigidez corresponde ao extremo oposto dos valores. destes parâmetros.

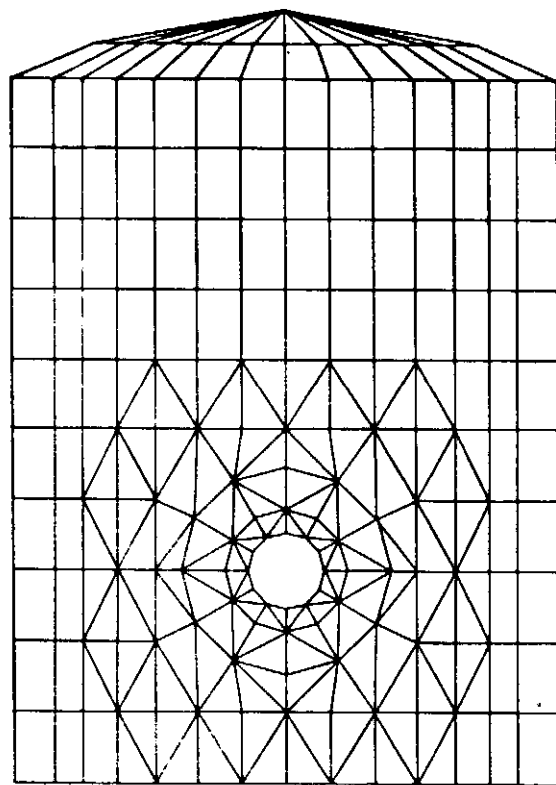
Para que se possa observar, ao menos parcialmente, o efeito da variação conjunta de todos os parâmetros, foram utilizados dois outros modelos.

No primeiro, fig. (IV.14), todos os parâmetros adimensionais assumem os seus valores extremos, de modo a que este modelo correspondesse a máxima rigidez possível. Assim sendo, este tem a maior espessura de parede, o maior diâmetro de bocal, a menor altura de fixação e a menor esbeltez.

No segundo, fig. (IV.15), os parâmetros assumem valores que o conduzem a mínima rigidez.

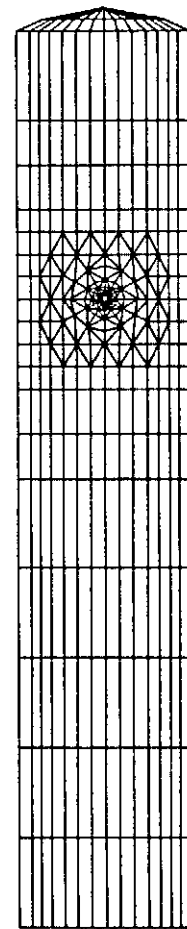
As matrizes correspondentes a estes dois modelos estão incluídas no Apend.I.

Apesar de que, neste momento, já se conheça qualitativamente a influência devida variação individual dos parâmetros adimensionais sobre a rigidez do vaso, e os valores máximos e mínimos desta rigidez, para a faixa considerada dos parâme-



$$\alpha = 15.00, \beta = 13.50, \gamma = 30, \delta = 1.25$$

Fig. (IV.14): Vaso de maior rigidez



$$\alpha = 2.50, \beta = 3.75, \gamma = 70, \delta = 5.00$$

Fig. (IV.15): Vaso de menor rigidez

tros, ainda não é possível prever a rigidez que se obteria se se variasse, por exemplo, arbitrariamente os parâmetros adimensionais, α ; β ; γ e δ ; o diâmetro, D ; o módulo de elasticidade, E ou o coeficiente de Poisson, ν . Levando-se em conta que, para efeitos práticos, os aços estruturais são usualmente tomados⁴ com coeficiente de Poisson, $\nu = 0.3$, o problema poderia ser reduzido a considerar que a matriz de rigidez do vaso é uma função como abaixo:

$$[K] = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta, E, P) \quad (\text{IV.14})$$

Onde P determina, juntamente com os parâmetros α , β , γ e δ as proporções do conjunto vaso-bocal. P pode ser o diâmetro D , a altura H , ou outra dimensão característica qualquer do vaso. Assim que se defina P e os parâmetros adimensionais, estarão definidas inequivocamente todas as outras dimensões.

O comprimento do bocal, c , não aparece em (IV.14) pois foi considerado aí como constante e igual a zero, porém, a partir do momento em que se tenha determinada a matriz de rigidez na superfície do vaso, a transferência desta matriz para a superfície de conexão do flange é direta com a equação (IV.9). Tratando então, inicialmente, do problema da rigidez do vaso com uma variação arbitrária dos parâmetros α ; β ; γ e δ , considere-se o gráfico da figura (IV.16).

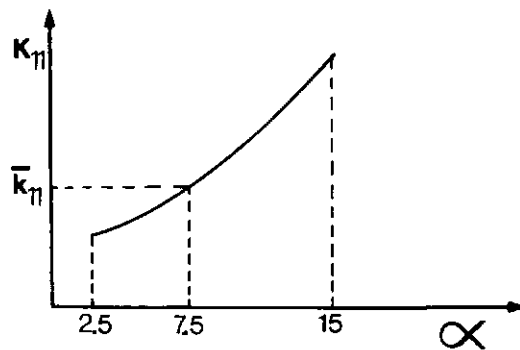


Fig. (IV.16): Variação de k_{11} em função de α

Uma parábola pode ser determinada expressando a variação do termo k_{11} das matrizes de rigidez em função de α :

$$k_{11} = f(\alpha) = A'\alpha^2 + B'\alpha + C' \quad (\text{IV.15})$$

ou, se for produzida uma translação da ordenada:

$$k_{11} = A(\alpha - 7.5)^2 + B(\alpha - 7.5) + \overline{k_{11}} \quad (\text{IV.16})$$

Onde $\overline{k_{11}}$ é o valor de k_{11} quando $\alpha = 7.5$ e os coeficientes A e B podem ser obtidos utilizando o método de interpolação de Lagrange^{8,3}; ou, pela simples substituição dos valores de rigidez na equação (IV.15). Para uma variação de k_{11} em função de α e β , fig. (IV.17),

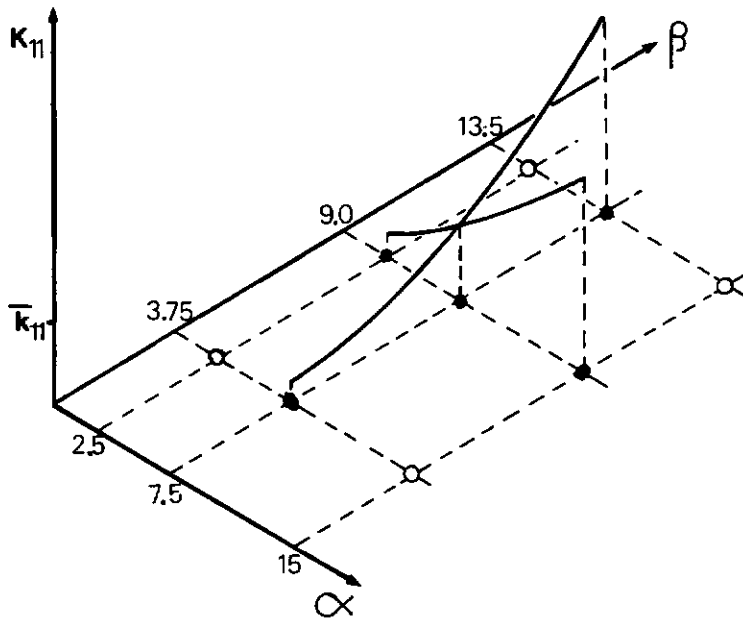


Fig. (IV.17): Variação de k_{11} em função α e β

uma interpolação biquadrática de Lagrange^{8,3} iria requisitar o conhecimento de k_{11} para todas as combinações de α e β que estão marcadas na fig. (IV.17) como círculos vazados ou cheios. Como só se dispõe das combinações correspondentes aos círculos cheios, e a determinação das outras seria muito custosa, especialmente quando estivessem envolvidos os quatro parâmetros adimensionais (P.A.), admitiu-se que, em uma aproximação grosseira, seria possível considerar a superposição de efeitos na rigidez quando se varia dois P.A. conjuntamente, para obter a expressão (IV.16), na situação bidimensional, como:

$$k_{11} = A(\alpha-7.5)^2 + B(\alpha-7.5) + C(\beta-9.00)^2 + D(\beta-9.00) + \overline{k_{11}} \quad (\text{IV.17})$$

Com o auxílio de um pequeno programa computacional, foram determinados os coeficientes do polinômio (IV.17) considerando porém a extensão deste a todos os quatro P.A.. Do mesmo modo, foram obtidas expressões para todos os 12 termos distintos da matriz de rigidez (M.R.). Estes coeficientes foram determinados com as M.R. transformadas para um comprimento de bocal, $c = 0$. Estas expressões serviram de entrada para um segundo programa computacional que, incluindo os procedimentos expressos nas equações (IV.9) e (IV.10), permite que sejam calculadas as M.R. do vaso com 800 mm de diâmetro e $E = 1.96 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$, bastando que sejam dados α , β , γ , δ e c . Foram utilizados outros modelos para testar a hipótese de superposição. O Apend.II apresenta lado a lado os valores obtidos com os modelos e com o programa. Os modelos com rigidez máxima e mínima, fig. (IV.14) e (IV.15), também foram utilizados nos testes.

Deve-se notar que a determinação de uma M.R., como descrito acima, envolveu a avaliação de 12 expressões distintas, correspondendo portanto o teste de um único modelo a 12 testes das expressões. A comparação dos resultados mostra que, em geral, existe uma concordância muito boa entre estes. Falhas porém foram notadas quando o P.A. α era tomado no seu valor mínimo. Nesta situação, certos termos da diagonal assumem valores negativos. Deste modo, pode-se considerar que este procedimento só seria válido para uma primeira aproximação, quando os P.A. sofressem somente variações pequenas em torno dos valores médios, visto que, qualquer que seja a forma da superfície de interpolação correta, esta deve ter um comportamento suave em uma

vizinhança pequena de S_0 ; ou, se a variação fosse feita somente em 1 P.A., quando então a interpolação teria utilizado todos os elementos necessários para ser considerada completa.

Fica restando portanto tratar da influência da variação de P e do módulo de elasticidade E .

Considerando a equação (II.28), onde se obtém a expressão da M.R. de um elemento,

$$[k] = [A]^{-T} \left\{ \int_{vol} [B]^T [D] [B] dV \right\} [A]^{-1}; \quad (II.28)$$

e, lembrando que no modelo adotado para o estudo foi considerado um estado plano de tensão ($\sigma_z = 0$), onde:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (II.23)$$

pode-se definir $[D']$, tal que:

$$[D'] = \frac{[D]}{E}.$$

Logo, já que o módulo de elasticidade é constante sobre o volume, (II.28) pode ser reescrita como:

$$[k] = E \left[[A]^{-T} \left\{ \int_{vol} [B]^T [D'] [B] dV \right\} A^{-1} \right] . \quad (IV.18)$$

As operações que se seguem, equações (II.8) e (II.38), para obtenção da M.R. do conjunto e da M. R. condensada em N, não impedem que se possa continuar evidenciando o módulo de elasticidade, E. Portanto, a matriz de rigidez condensada $[K]$ pode ser escrita como:

$$[K] = E [G'] \quad \text{ou,}$$

$$k_{ij} = E g'_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, 6 \quad (IV.19)$$

Neste momento é importante que se observe as dimensões dos coeficientes de $[K]$ e $[G']$ que são apresentados, em forma tabular, abaixo. Onde F = força e L = comprimento.

MATRIZES			
$[K]$		$[G']$	
k_{ij}	DIMENSÃO	g'_{ij}	DIMENSÃO
$k_{11}, k_{22}, k_{33}, k_{31}$	F/L	$g'_{11}, g'_{22}, g'_{33}, g'_{31}$	L
$k_{42}, k_{51}, k_{62}, k_{53}$	F	$g'_{42}, g'_{51}, g'_{62}, g'_{53}$	L ²
$k_{44}, k_{55}, k_{66}, k_{64}$	F.L	$g'_{44}, g'_{55}, g'_{66}, g'_{64}$	L ³

TAB. (IV.2): Dimensões das matrizes $[K]$ e $[G']$

Portanto, os coeficientes de $[G']$ tem dimensão de comprimento elevado a potência variável. Este fato sugere que uma adimensionalização pode ser feita com relação a uma dimensão característica, P , do vaso. Adotando para este fim $P = D$, o diâmetro, pode-se determinar uma matriz $[G]$, adimensional, cujos coeficientes guardam a relação seguinte com os coeficientes de $[G']$

$$g_{ij} = \frac{g'_{ij}}{D^n} \quad (\text{IV.20})$$

$$i, j = 1, 2, \dots, 6.$$

$$\begin{aligned} e \quad n &= 1 \quad \text{para} \quad ij = 11; 22; 33; 31 \\ n &= 2 \quad \text{para} \quad ij = 42; 51; 62; 53 \\ n &= 3 \quad \text{para} \quad ij = 44; 55; 66; 64 \end{aligned}$$

Deve-se notar, neste ponto, que a matriz $[G]$ só depende da forma geométrica do conjunto vaso-bocal que, por sua vez, é definida completamente com os quatro P.A. característicos, α ; β ; γ e δ , i.ê., $[G] = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Assim sendo, esta matriz será denominada de "matriz característica". Logo, combinando (IV.20) e (IV.19) pode-se chegar a:

$$\frac{k_{ij}}{E D^n} = g_{ij} \quad (\text{IV.21})$$

onde $i, j = 1, 2, 3, \dots, 6$

e n é como definido em (IV.20).

Porém, como os g_{ij} são constantes adimensionais, dependentes da forma e independentes de E e D , os coeficientes $k_{ij,A}$ e $k_{ij,B}$, de matrizes de rigidez determinadas com os módulos de elasticidade e diâmetros respectivamente E_A , D_A e E_B , D_B , para dois vasos de mesma forma, guardam a seguinte relação:

$$\frac{K_{ij,A}}{E_A D_A^n} = \frac{k_{ij,B}}{E_B D_B^n} \quad (\text{IV.22})$$

$$i, j = 1, 2, 3, \dots, 6$$

e n como definido em (IV.20)

Este fato sugere que, se desejada, a extrapolação dos resultados já obtidos com o módulo de elasticidade $E = 1.96 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ e $D = 800 \text{ mm}$ é direta para vasos de qualquer ou tro diâmetro ou módulo de elasticidade.

Como exemplo de cálculo, a M. R. de um vaso com todas as dimensões iguais a 3 vezes as do vaso S_0 , porém mesmo módulo de elasticidade, é apresentada na fig. (IV.18).

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 7.50$		$\beta = 9.00$		$\gamma = 50.00$		$\delta = 2.50$
D = 2400		H = 6000		t = 18		c = 150
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	4.20E+04					
x_2		3.54E+05				
x_3	3.81E+04		2.03E+06			
x_4		2.70E+07		1.87E+11		
x_5	5.69E+06		3.20E+08		5.51E+10	
x_6		-3.97E+07		-2.32E+09		6.26E+09

Fig. (IV.18): M. R. do vaso com dimensões iguais a 3 vezes as do vaso S_0

O que se constata é que, mesmo para um vaso com proporções que podem ser consideradas vantajadas, como este, de espessura de parede de quase 2 cm, a rigidez relativa a diagonal não atinge valores tão altos quanto pressupõem as recomendações, ver Cap. I, de se utilizar um "default" de 10^7 N/mm para a rigidez à translação e de 10^{12} N.mm/rad para a rigidez à rotação.

IV.2.3 - Comparação com Outros Resultados

Nesta seção são traçadas comparações entre a rigidez do modelo de elementos finitos do vaso médio e as rigidezes calculadas, para este mesmo vaso, de acordo com a British Standard^{2 9}, Roark^{3 3} e M. W. Kellogg Company^{1 4} cujos métodos já foram descritos na seção (III.4). As condições de contorno consideradas em cada uma destas referências foi distinta; entre si, e daquelas tomadas para o vaso médio. Modelos adicionais que procuravam reproduzir aproximadamente estas condições foram gerados e seus resultados também utilizados para efeito da comparação que é apresentada, separadamente para cada referência, a seguir:

i) British Standard

As condições da British Standard são de um carregamento sobre uma região quadrada, não perfurada. O raio médio de uma região circular equivalente está expresso na equação (III.23). As extremidades do vaso são bi-apoiadas. Esta norma permite calcular a flexibilidade a um momento longitudinal, um momento circunferencial e uma força radial.

O modelo de elementos finitos construído para aproximar estas condições de contorno está apresentado na fig. (IV.19).

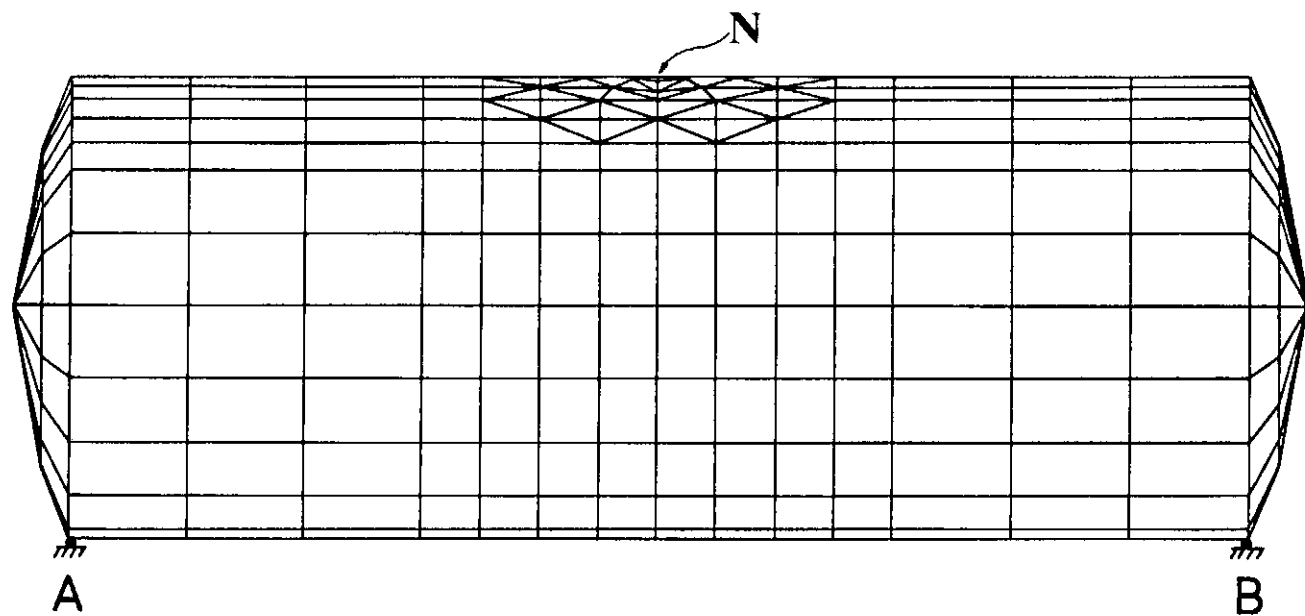


Fig. (IV.19): Modelo com α , β , γ e δ iguais ao do vaso S_0 e condições de contorno distintas

Este tem as extremidades fechadas e é rigidamente fixo em dois pontos nodais A e B.

Os resultados desta, como já foi dito, e das outras referências, devem ser considerados como estimativas da flexibilidade do vaso. Assim sendo, para que a comparação pudesse ser feita convenientemente, a M. R. deste modelo adicional, $[K]$, e flexibilidade, $[A]$, foram obtidas considerando o comprimento do bocal $c = 0$, i.é, o ponto N na superfície do vaso, e a seguir tomados os inversos daqueles termos da diagonal de $[A]$ a serem comparados. Para o vaso médio, os mesmos procedimentos foram adotados; porém, o comprimento do bocal, c , foi mantido em 50 mm, de modo a tornar esta base de comparação mais realística, os resultados estão apresentados na tabela a seguir:

	MODELO FIG. (IV.19)	VASO MÉDIO	BRITISH STANDARD	UNIDADES
$1/a_{11}$	1.11×10^4	1.38×10^4	8.25×10^3	[N/mm]
$1/a_{55}$	1.80×10^8	1.81×10^8	6.69×10^6	[N.mm/rad]
$1/a_{66}$	6.17×10^6	6.71×10^7	5.93×10^6	[N.mm/rad]

TAB. (IV.3): Comparação com a British Standard

ii) Roark

As condições consideradas por Roark são as de um vaso bi-apoiado, sujeito a um carregamento radial distribuído sobre uma pequena área. A expressão (III.26) foi empregada, com

os parâmetros adequados. Na comparação foi tomado o modelo aproximativo da fig. (IV.19) e os resultados apresentados a seguir:

	MODELO FIG. (IV.19)	VASO MÉDIO	ROARK	UNIDADE
$1/a_{11}$	1.11×10^4	1.38×10^4	6.25×10^3	[N/mm]

TAB. (IV.4): Comparação com Roark

iii) The Kellog Company

A solução dada ao problema nesta referência é voltada para efeitos locais. Assim sendo, o modelo do vaso médio en gastado ao longo de ABCDEA, como na fig. (IV.5), porém com o pon to N sobre a superfície do vaso, foi considerado para aproximar estas condições de contorno.

Os resultados são apresentados na tabela a seguir:

	VASO MÉDIO ENGASTADO AO LONGO DE ABCDEA	VASO MÉDIO	KELLOG	UNIDADE
$1/a_{55}$	1.90×10^8	1.81×10^8	8.20×10^7	[N.mm/rad]

TAB. (IV.5): Comparação com M. W. Kellog Company

A tab. (IV.5) mostra que a aplicação do método dado por Kellog permitiu que se obtivesse um resultado muito próximo aqueles obtidos com os dois modelos considerados na comparação.

Observação global dos resultados expostos nas três tabelas, permite concluir que uma boa estimativa da flexibilidade do vaso pode ser obtida se forem utilizados os métodos da British Standard, quando se tratam de forças radiais ou momentos circunferenciais, e de Kellog, no caso de momentos longitudinais.

CAPÍTULO V

INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ DOS APOIOS NO COMPORTAMENTO DE UM SISTEMA DE TUBULAÇÕES

Neste capítulo procura-se, com um sistema de tubulações tomado para exemplo, fazer uma avaliação da influência da rigidez do apoio nos resultados da análise do comportamento da tubulação. O sistema adotado é uma linha de alimentação de água de um reator nuclear¹⁰. O modelo de elementos finitos correspondente está apresentado na fig. (V.1) que inclui a numeração nodal utilizada.

Este sistema tem três pontos de apoio, localizados nos nós 55, 56 e 57, e um suporte de mola no ponto nodal 35. Note-se a existência de duas válvulas, uma delas representada pelos elementos que unem os nós 8; 9; 10 e 11 e outra relativa aos nós 33; 34; 35 e 36.

São calculados os deslocamentos e as forças internas nos pontos nodais do modelo utilizando-se valores de rigidez nos apoios, sucessivamente, de 10^2 ; 10^5 ; 10^7 e 10^9 N/mm para a translação e 10^7 , 10^9 , 10^{12} e 10^{14} N.mm/rad para a rotação, com o programa KWUROHR¹³. A notação $10^{2/7}$; $10^{5/10}$; $10^{7/12}$ e $10^{9/14}$ é adotada para estes pares de valores de rigidez. Quando se deseja adotar uma faixa de rigidez variável e crescente para os apoios, a necessidade de se utilizar valores diferenciados para a rigidez à translação e à rotação é justificada com os resul

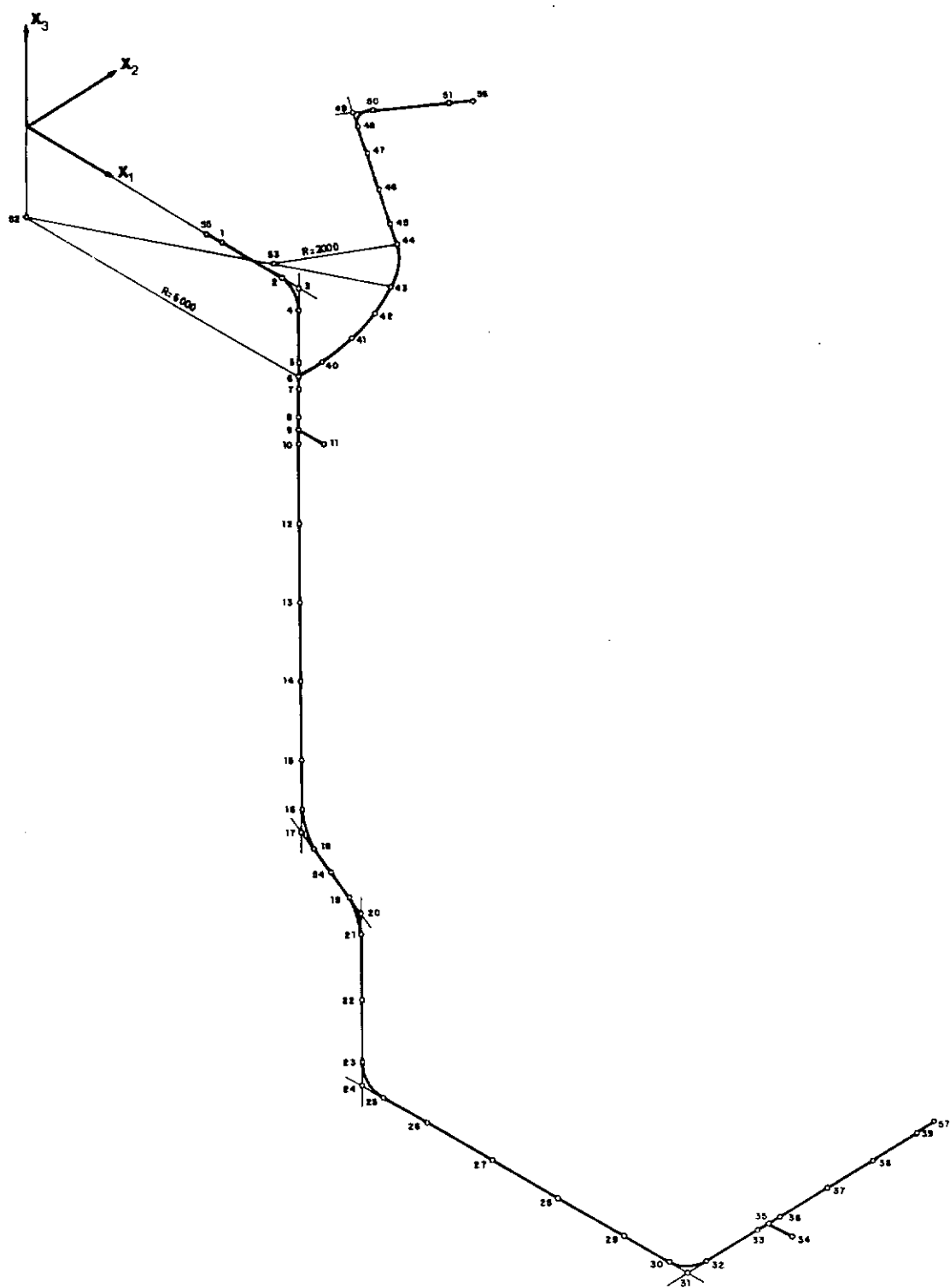


Fig. (V.1): Linha de alimentação de água

tados já obtidos^{11,36} para a rigidez de apoios reais que, corroborados por aqueles do Cap. IV, mostram ser, em geral, a razão entre estes valores de rigidez da ordem de 10^5 , pelo menos quando são utilizadas as unidades N e mm em sua representação.

Para que se possa observar a influência da rigidez do próprio sistema, os cálculos dos deslocamentos e forças são desenvolvidas com três diâmetros nominais de tubulação: 100, 300 e 400 mm.

Dados gerais de seção e peso linear dos tubos, válvulas e meio circulante; raio das curvas e propriedades do material à temperatura ambiente estão apresentados na tab. (V.1).

DN	da (mm)	t (mm)	P _{tubo} (N/mm)	P _{meio} (N/mm)	Tipo de Seção	Raio da Curva (mm)
100	114.3	3.6	0.097	0.088	tubo e curva válvulas	152.4
	114.3	18	0.422	0.047		-
300	323.9	10.0	0.764	0.712	tubo e curva válvulas	457.2
	323.9	50.0	3.334	0.386		-
400	406.4	12.5	1.199	1.121	tubo e curva válvulas	609.6
	406.4	62.5	5.233	0.610		-

Onde: DN - diâmetro nominal; da - diâmetro externo; t - espessura; P_{tubo} - peso do tubo e P_{meio} - peso do meio (água)

Material: 1.4550 (Norma DIN 17006)

Densidade: 7.9 g/cm³

T _T (°C)	E (N/mm ²)	ν	α (°C ⁻¹)
20	200x10 ³	0.3	16x10 ⁻⁶

TAB. (V.1): Características gerais do sistema

Com as M. R. dos suportes A5-H77 e A6-H201, denominados de agora em diante simplesmente de "SUP1" e "SUP2", e a do vaso S_0 condensadas nos pontos de apoio, em procedimento já descrito na seção (II.4), determinam-se novamente os deslocamentos e forças nodais do sistema.

Para este cálculo obteve-se uma estimativa da M.R. do vaso S_0 , quando este tinha o bocal com diâmetros de 100, 300 e 400 mm, utilizando os procedimentos contidos na seção (IV.2.2).

Pode-se então fazer uma comparação destes resultados de deslocamento e força com aqueles já obtidos utilizando os valores de rigidez $10^{2/7}$; $10^{5/10}$; $10^{7/12}$ e $10^{9/14}$. Esta comparação é feita com o intuito de avaliar quais destes últimos valores de rigidez representam mais realisticamente a flexibilidade do vaso S_0 e dos SUP1 e SUP2 bem como o efeito na análise de se utilizar determinada rigidez dos apoios.

Os cálculos são levados a efeito tanto na situação de carregamento estático, considerando-se então o peso próprio como a carga atuante, quanto na situação de carregamento dinâmico, via excitação sísmica. Neste último caso o programa emprega o método da superposição modal na integração da equação da dinâmica estrutural,

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + [C] \{\dot{\delta}\} + [K] \{\delta\} = \{p(t)\} , \quad (V.1)$$

onde: $[M]$ - matriz de massa do sistema;

$[C]$ - matriz de amortecimento;

$[K]$ - matriz de rigidez;

$\{\delta\}, \{\dot{\delta}\}, \{\ddot{\delta}\}$ - os vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações nodais

e $\{p(t)\}$ - vetor de carregamento externo.

No caso do terremoto as forças de inércia determinam o vetor carregamento externo que é, para cada direção global i , $i = 1; 2; 3$, dado por:

$$\{p(t)\} = - [M] \{\eta\}_i a_i(t) \quad (V.2)$$

onde $a_i(t)$ é a aceleração do terremoto na direção i e $\{\eta\}_i$ é um vetor que contém elementos unitários nas linhas correspondentes aos deslocamentos nodais na direção i e elementos nulos nas outras.

A solução do problema de autovalor e consequente determinação das frequências naturais e autovetores do sistema é obtida com o método de iteração em subespaços³⁵.

A propriedade de ortogonalidade dos autovetores dos modos naturais, relativa às matrizes de massa e rigidez permite que se escreva:

$$[X]^T [M] [X] = [\bar{M}] \quad (V.3)$$

$$[X]^T [K] [X] = [\bar{K}] \quad (V.4)$$

onde: $[X]$ - matriz dos autovetores

$[\bar{M}]$ - matriz diagonal de massa generalizada

$[\bar{K}]$ - matriz diagonal de rigidez generalizada

Para o amortecimento proporcional que se pressupõe aqui³⁸, a condição de ortogonalidade prevalece também com relação a matriz de amortecimento, o que permite que se defina:

$$[\bar{C}] = [X]^T [C] [X] = 2[\xi] [\bar{M}] [\Omega] \quad (V.5)$$

onde $[\bar{C}]$ - matriz diagonal de amortecimento generalizado

$[\xi]$ - matriz diagonal dos coeficientes de amortecimento reduzidos, especificados em cada modo natural

$[\Omega]$ - matriz diagonal das frequências naturais

Tendo em vista que no método de superposição modal exprime-se o deslocamento de cada ponto do sistema como uma superposição de produtos da amplitude modal pelo deslocamento generalizado de cada modo,

$$\{\delta\} = [X] \{\Delta\} \quad , \quad (V.6)$$

onde $\{\Delta\}$ é o vetor dos deslocamentos generalizados, a equação (V.1) pode ser reescrita de forma mais conveniente com a substituição de (V.6) e a prêmultiplicação por $[X]^T$:

$$[X]^T [M] [X] \{\ddot{\Delta}\} + [X]^T [C] [X] \{\dot{\Delta}\} + [X]^T [K] [X] \{\Delta\} = [X]^T \{p(t)\} \quad (V.7)$$

Considerando (V.3); (V.4) e (V.5), esta equação pode ainda ser simplificada para:

$$[\bar{M}] \{\ddot{\Delta}\} + [\bar{C}] \{\dot{\Delta}\} + [\bar{K}] \{\Delta\} = \{P(t)\} \quad (V.8)$$

onde $\{P(t)\} = [X]^T \{p(t)\}$ é o vetor de carregamento modal.

Da definição de $\{p(t)\}$, equação (V.2), e considerando que (V.8) se constitui em um sistema de equações desacopladas para cada modo j , tem-se:

$$\ddot{\Delta}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{\Delta}_j + \omega_j^2 \Delta_j = -L_{ji} a_i(t) \quad (V.9)$$

onde $L_{ji} = \frac{[X]_j^T [M] \{n\}_i}{\bar{M}_j}$ é o fator de participação mássica relativo ao modo j na direção i .

A equação (V.9) pode ser vista como aquela de um sistema de 1 g.l.. No método de superposição modal o máximo de Δ_j , para cada modo j e cada direção i , é obtido.

Neste cálculo não é considerado o histórico no tempo das acelerações e sim o espectro das acelerações,

$$S_{a_i}(\xi_j, \omega_j) = S_{a_{ji}} = S_{v_i} \omega_j . \quad (V.10)$$

Onde $S_{a_{ji}}$ é a aceleração espectral na direção i relativa ao modo j

e S_{v_i} o máximo da integral de Duhamel³⁸, da solução da equação dinâmica de um sistema com 1 g.l., frequência natural ω_j , excitado com uma dada história no tempo de aceleração na direção i .

Logo, a solução de (V.9) para o máximo de Δ_j na direção i será³⁵:

$$\Delta_{j\text{m}\acute{a}x}^i = \frac{L_{ji} S_{a_{ji}}}{\omega_j^2} . \quad (V.11)$$

Considerando (V.6) e (V.11) é possível determinar o deslocamento máximo, $\delta_{k\text{m}\acute{a}x}^{ij}$, do ponto nodal k , no modo j , na direção i , como:

$$\delta_{k\text{m}\acute{a}x}^{ij} = \frac{X_{kj} L_{ji} S_{a_{ji}}}{\omega_j^2} \quad (V.12)$$

onde X_{kj} é a componente do autovetor $\{X\}_j$ relativa ao ponto nodal k .

Tendo em conta que o programa adota o método de superposição de efeitos da raiz quadrada da soma dos quadrados (R.Q.S.Q.) para todos os n modos que contribuem apreciavelmente na superposição espectral, o deslocamento nodal máximo, $\delta_{k\text{m}\ddot{x}}^i$, do ponto nodal k , na direção i , será:

$$\delta_{k\text{m}\ddot{x}}^i = \left[\sum_{j=1}^n (X_{kj} L_{ji} \frac{S_{a_{ji}}}{\omega_j^2})^2 \right]^{1/2} \quad (\text{V.13})$$

Quando atuarem simultaneamente acelerações a_i nas três direções globais i , $i = 1; 2; 3$, a superposição de efeitos é também na forma R.Q.S.Q., portanto:

$$\Delta_{j\text{m}\ddot{x}} = \left[\sum_{i=1}^3 (L_{ji} \frac{S_{a_{ji}}}{\omega_j^2})^2 \right]^{1/2} \quad (\text{V.14})$$

Logo, o deslocamento nodal máximo será:

$$\delta_{k\text{m}\ddot{x}} = \left[\sum_{i=1}^n (X_{kj} \Delta_{j\text{m}\ddot{x}})^2 \right]^{1/2} \quad (\text{V.15})$$

A partir do momento em que o estado deformacional esteja definido, as forças nodais também o estarão via matriz de rigidez global, conforme a equação (II.1).

Na análise foi utilizado como excitação um espectro de acelerações (espectro de resposta de projeto)³⁹, suavizado e ampliado, que é apresentado, em forma tabular, a seguir:

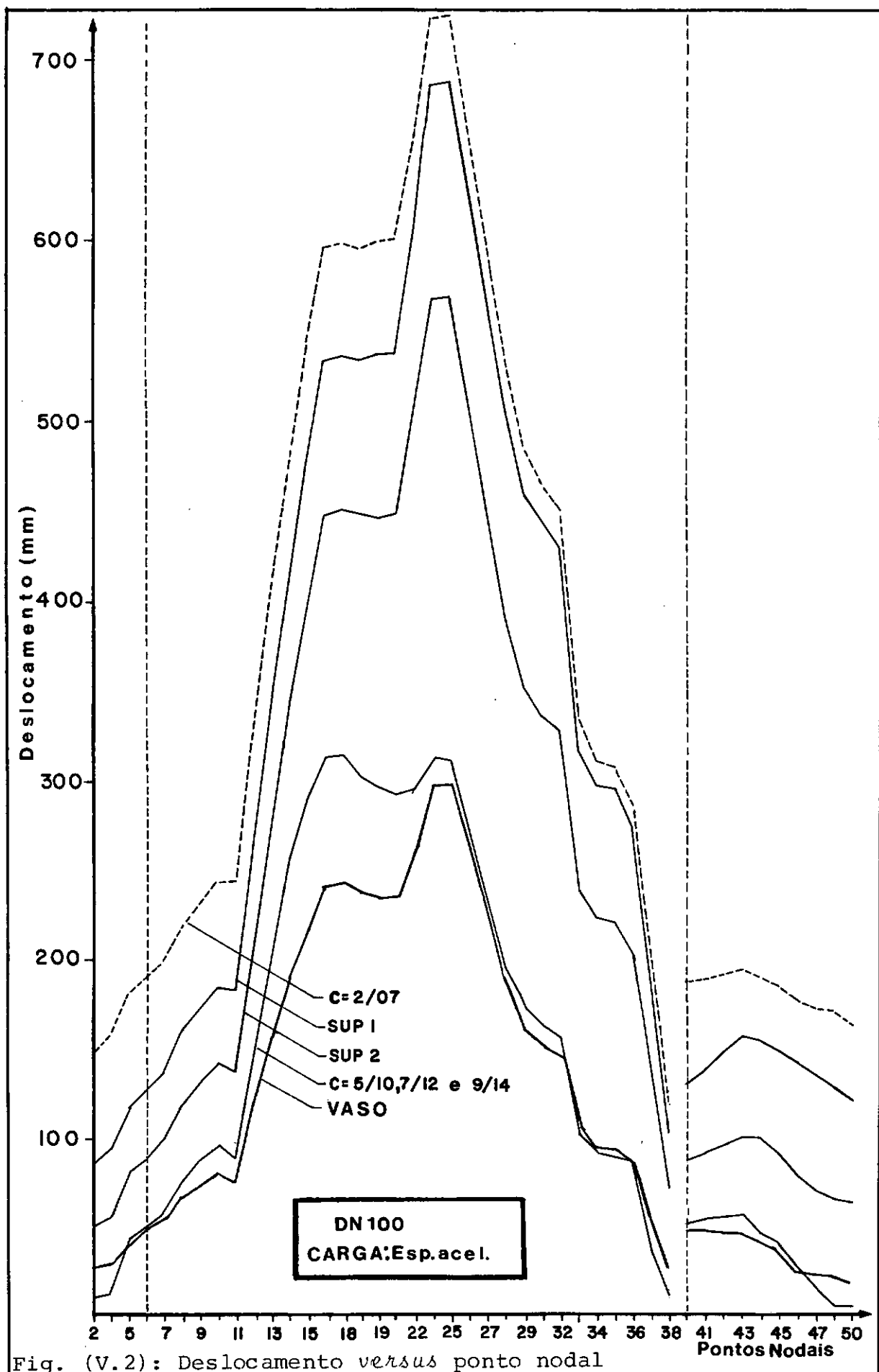
$f [H_z]$	ACELERAÇÕES NAS DIRE- ÇÕES X_1 e X_2 EM g's
0.17	0.160
0.92	0.252
1.42	1.205
1.70	2.793
2.30	2.793
2.53	2.606
2.99	1.015
3.45	0.764
3.56	0.677
6.21	0.677
6.67	0.630
6.72	0.620
7.82	0.620
9.20	0.393
13.80	0.302
32.20	0.283
34.00	0.283

$f [H_z]$	ACELERAÇÃO NA DIREÇÃO X_3 EM g's
0.17	0.010
0.90	0.072
1.02	0.088
1.11	0.088
1.70	0.382
1.79	0.446
4.38	0.446
4.42	0.468
5.67	0.468
5.78	0.495
6.22	0.495
6.29	0.533
6.46	0.591
8.74	0.591
10.35	0.357
12.65	0.208
13.22	0.163
17.83	0.163
20.70	0.142
24.73	0.108
34.00	0.101

TAB. (V.2): Espectros de resposta de projeto adotados

V.1 - COMPARAÇÕES ENTRE OS RESULTADOS

Como uma primeira observação dos resultados, podem ser vistos na fig. (V.2) os gráficos de deslocamento resultante *versus* ponto nodal obtidos com a utilização de todos os diferentes valores de rigidez dos apoios, para o caso da tubulação de DN 100, quando é adotado o carregamento dinâmico. As duas linhas tracejadas verticais localizam o entrocamento.



Constata-se na observação desses gráficos que a medida que a rigidez dos apoios aumenta os deslocamentos nodais diminuem sensivelmente. Apesar de que os mesmos permitam obter uma noção visual, de quão maiores ou menores são os deslocamentos de cada ponto nodal com os diversos valores de rigidez adotados para os apoios, não é possível se obter daí uma avaliação numérica simples do comportamento do sistema como um todo. Além disso é difícil por intermédio desses se fazer qualquer estimativa de, por exemplo, qual dos valores de rigidez, $10^{2/7}$; $10^{5/10}$; $10^{7/12}$ e $10^{9/14}$, poderiam representar mais adequadamente o vaso S_0 ou os dois suportes SUP 1 e SUP 2. Para tentar alcançar este último objetivo, o procedimento descrito a seguir gerou o gráfico da fig. (V.3.a). Pode-se, por intermédio deste observar a razão média entre os deslocamentos nodais obtidos via utilização da faixa de rigidez que vai de $10^{2/7}$ à $10^{9/14}$ e da M. R. do SUP 1 na modelagem dos apoios. Para tanto, calcula-se a expressão:

$$\frac{\overline{D}_{Dc}}{D_{SUP1}} = \frac{\sum_{i=1}^{N.P.N.} \frac{(D_c)_i}{(D_{SUP1})_i}}{N.P.N.} \quad (V.16)$$

onde $(D_c)_i$ é o deslocamento do ponto nodal i para a rigidez do apoio, sucessivamente, de $c = 10^{2/7}$; $10^{5/10}$; $10^{7/12}$ e $10^{9/14}$;

$(D_{SUP1})_i$ o deslocamento do ponto nodal i para a rigidez do apoio dada pela M.R. do SUP 1;

N.P.N. o número de pontos nodais.

e $\frac{\overline{D_c}}{D_{SUP1}}$ a razão média entre $(D_c)_i$ e $(D_{SUP1})_i$

Assim são obtidos os 4 pontos necessários a determinação de cada uma das três curvas dessa figura, correspondentes aos três diâmetros nominais.

Procedimento análogo foi utilizado para construção das figs. (V.3.b) e (V.3.c). Obtém-se a fig. (V.4) do mesmo modo, porém mudando os elementos a serem comparados que passam a ser as forças nodais. Visto que a rigidez dos vasos já sofrera um estudo mais detalhado no Capítulo IV, a atenção se voltou nessa última figura e nas subsequentes, figs. (V.5) e (V.6), para o caso de carregamento dinâmico, à observação exclusiva dos suportes estruturais SUP 1 e SUP 2.

Antes que se passe aos comentários sobre os gráficos e visando a melhor compreensão dos seus resultados é importante fazer uma observação. Alguns autores^{10,12} notaram que à medida que a rigidez do apoio ultrapassa em 10^2 (unidades N e mm) a rigidez do sistema, não haverá influência da primeira sobre os cálculos, qualquer que seja seu valor. Para efeito de estimativa da rigidez do sistema quando este tem DN 100; 300 e 400 mm, produziu-se a condensação da M. R. global no ponto de apoio 55.

A média dos elementos da diagonal relativos a translação e a rotação das M. R. obtidas está apresentada na Tab. (V.3), a qual inclui também a rigidez média dos suportes e do vaso S_0 .

	RIGIDEZ MÉDIA	
	TRANSLAÇÃO	ROTAÇÃO
DN 100	2.0×10^1	9.4×10^7
DN 300	1.0×10^3	4.5×10^9
DN 400	2.3×10^3	1.0×10^{10}
SUP 1	3.0×10^5	5.0×10^8
SUP 2	1.0×10^5	7.0×10^8
Vaso S _o	2.7×10^5	3.1×10^9

TAB. (V.3): Rigidez média à translação e à rotação do sistema; dos suportes e do vaso S_o

Estes valores serão posteriormente considerados quando dos comentários sobre as figs (V.3) à (V.6).

V.1.1 - Carregamento Estático

A comparação entre os valores obtidos para os deslocamentos utilizando as constantes $c = 10^{2/7}$; $10^{5/10}$; $10^{7/12}$ e $10^{9/14}$; os suportes SUP 1 e SUP 2 e o vaso S_o está apresentada na fig. (V.3).

Para todos os gráficos dessa e, como se poderá observar posteriormente, das figuras que seguem a linha relativa ao DN 100 apresenta uma horizontalização a partir de $C = 10^{5/10}$.

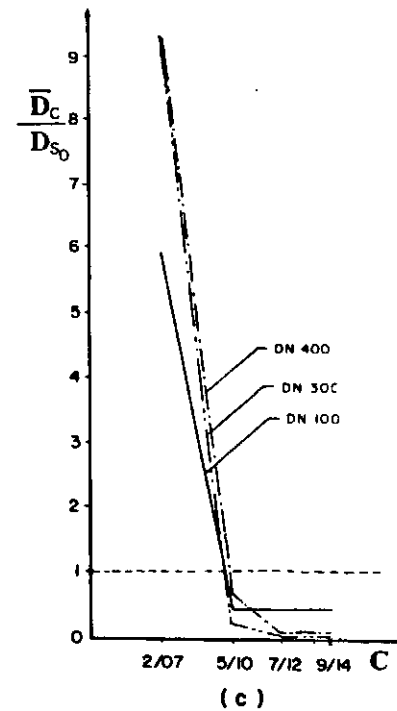
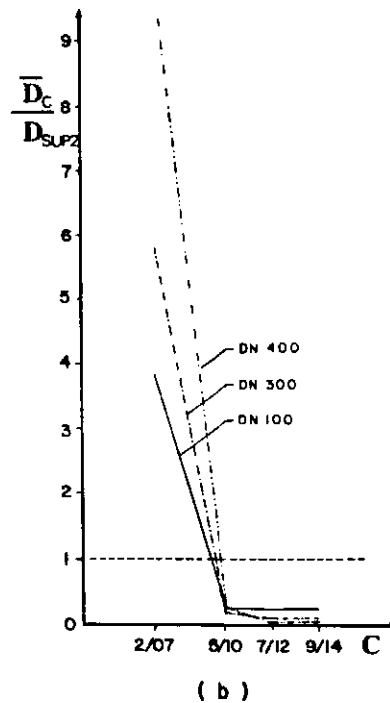
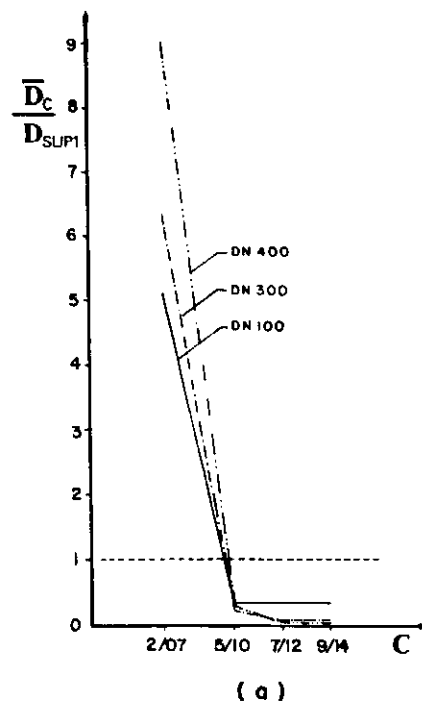
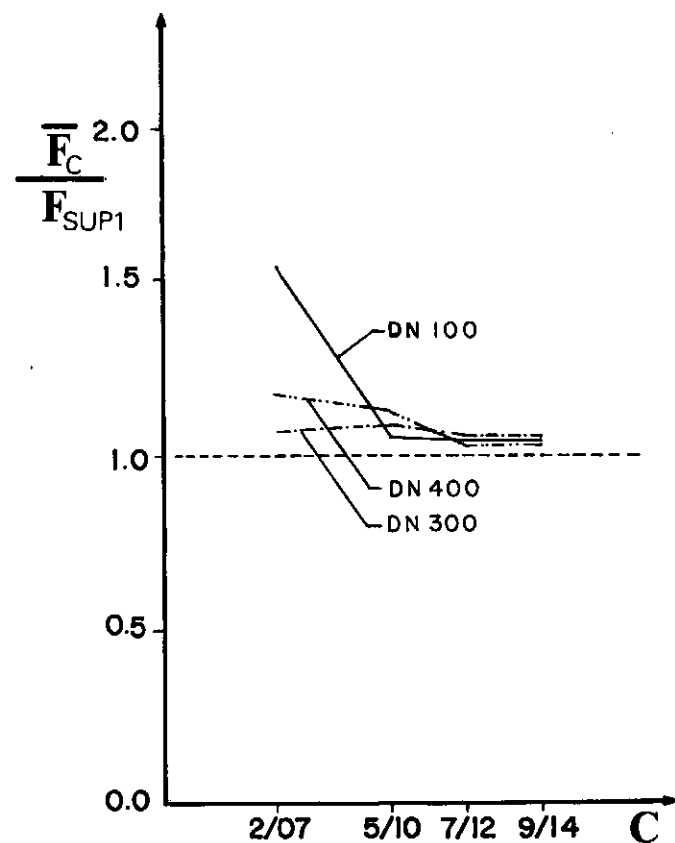


Fig. (V.3): Razão média entre os deslocamentos obtidos com a rigidez variável dos apoios e com as M. R. dos SUP1 ; SUP2 e vaso S_0 para o carregamento do peso próprio

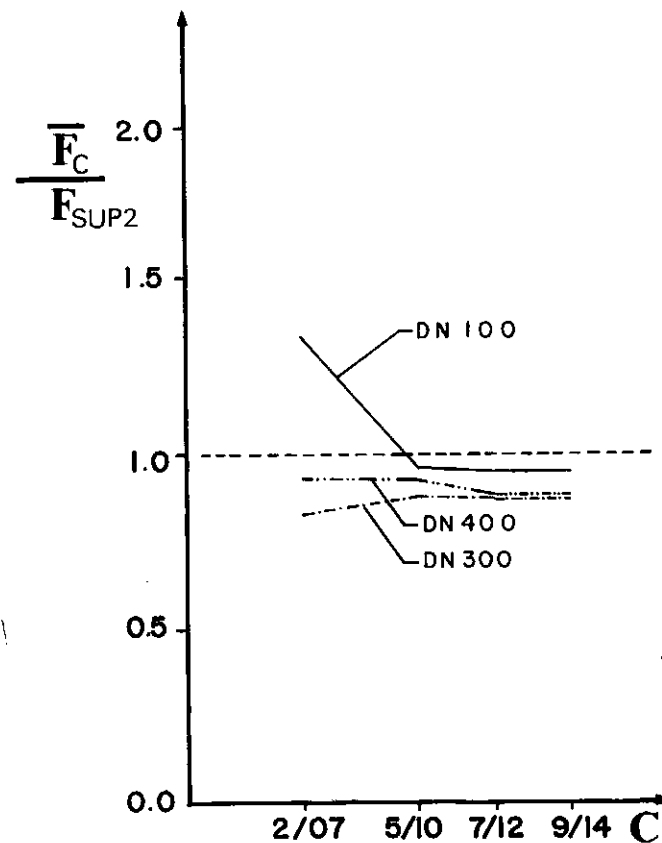
O mesmo ocorrendo a partir de $c = 10^{7/12}$ para os DN 300 e 400. Tal fato confirma a expectativa de não afetação nos resultados dos cálculos quando a rigidez do apoio ultrapassar em 10^2 a rigidez dos sistemas, Tab. (V.3).

A utilização de $c = 10^{2/7}$ produziu deslocamentos muito superiores àqueles obtidos quando se modelaram os apoios com as M. R. dos suportes e do vaso, portanto esse valor não é conveniente para uma modelagem. Mesmo para um vaso de proporções avantajadas, como o que tem sua M. R. representada na fig. (IV.18), não é de se aguardar resultados muito distintos dos obtidos aqui, visto que a ordem de grandeza dos elementos desta M. R. não ultrapassa consideravelmente àquela das M. R. dos SUP 1; SUP 2 e do vaso S_O . A fig. (V.4) apresenta a comparação no caso das forças internas.

Através dessa figura, e comparando-a com a fig. (V.3), nota-se que os valores de $\overline{F_C}/\overline{F_{SUP}}$ são sensivelmente menores que os de $\overline{D_C}/\overline{D_{SUP}}$. Conclui-se portanto que as forças internas são menos afetadas com a variação da rigidez do apoio que os deslocamentos.



(a)



(b)

Fig. (V.4): Razão média entre as forças obtidas com a rigidez variável dos apoios e as M. R. dos suportes para o carregamento do peso próprio

V.1.2 - Carregamento Dinâmico

As figs. (V.5) e (V.6) apresentam as razões entre os deslocamentos e as forças internas obtidos com a rigidez variável, c , e as M. R. dos suportes.

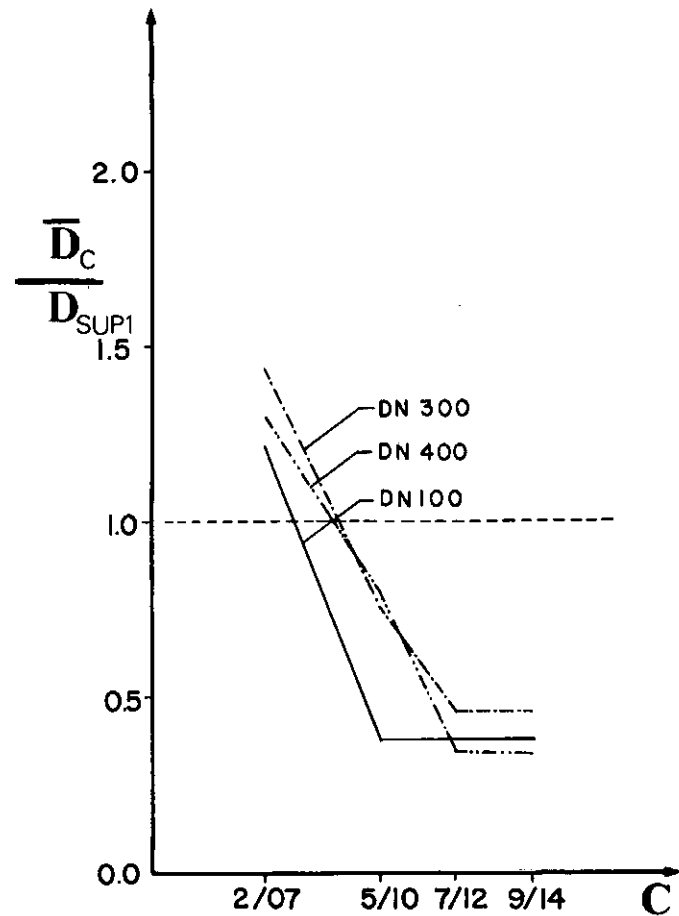
No que tange aos deslocamentos, os resultados obtidos na consideração de um carregamento dinâmico se assemelharam muito àqueles da situação estática, porém, as razões médias foram sensivelmente menores.

As forças internas, por seu turno, apresentaram um comportamento que necessita de uma observação mais cuidadosa. Para tanto, é conveniente apresentar, Tab. (V.4), a variação da frequência fundamental dos sistemas de DN 100, 300 e 400.

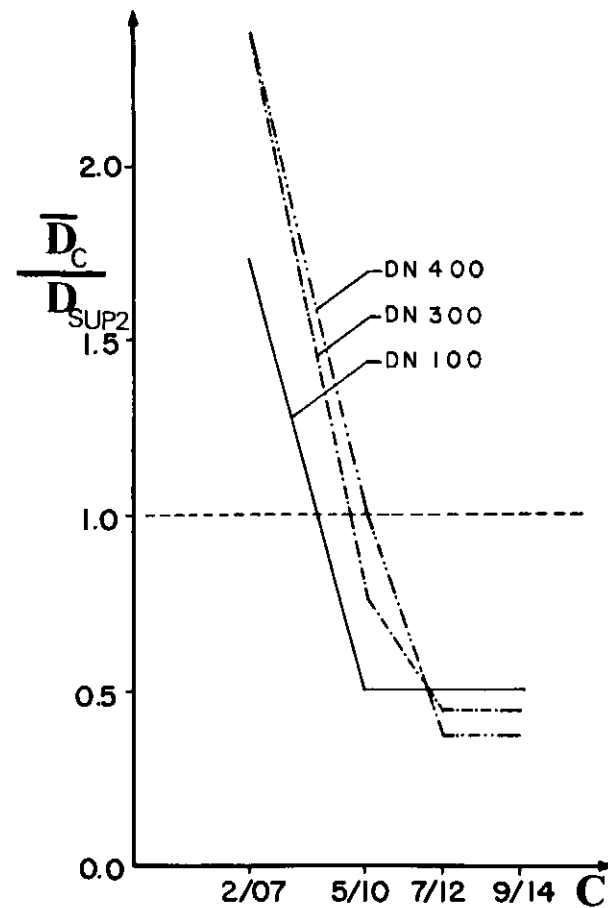
	RIGIDEZ DO APOIO					
	SUP 1	SUP 2	$10^{2/7}$	$10^{5/10}$	$10^{7/12}$	$10^{9/14}$
DN 100	0.373	0.426	0.356	0.627	0.628	0.688
DN 300	0.759	0.767	0.526	1.463	1.612	1.613
DN 400	0.822	0.881	0.500	1.595	1.971	1.976

TAB: (V.4): Frequência fundamental, $[H_z]$, em função do diâmetro do sistema e da rigidez do apoio

Um fato importante pode ser derivado dessa tabela. A rigidez do apoio influenciou mais a frequência fundamental que a rigidez do próprio sistema. Tome-se, por exemplo, o par (DN300, SUP1). Para esse a frequência fundamental é 0.759 Hz.



(a)



(b)

Fig. (V.5): Razão média entre os deslocamentos obtidos com a rigidez variável dos apoios e as M. R. dos suportes para o carregamento dinâmico

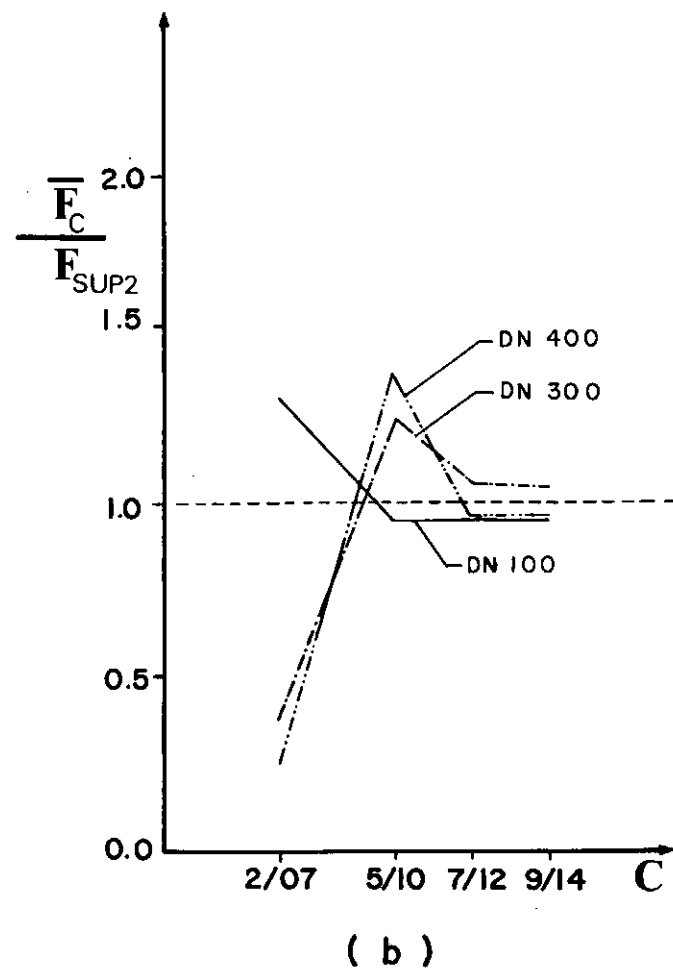
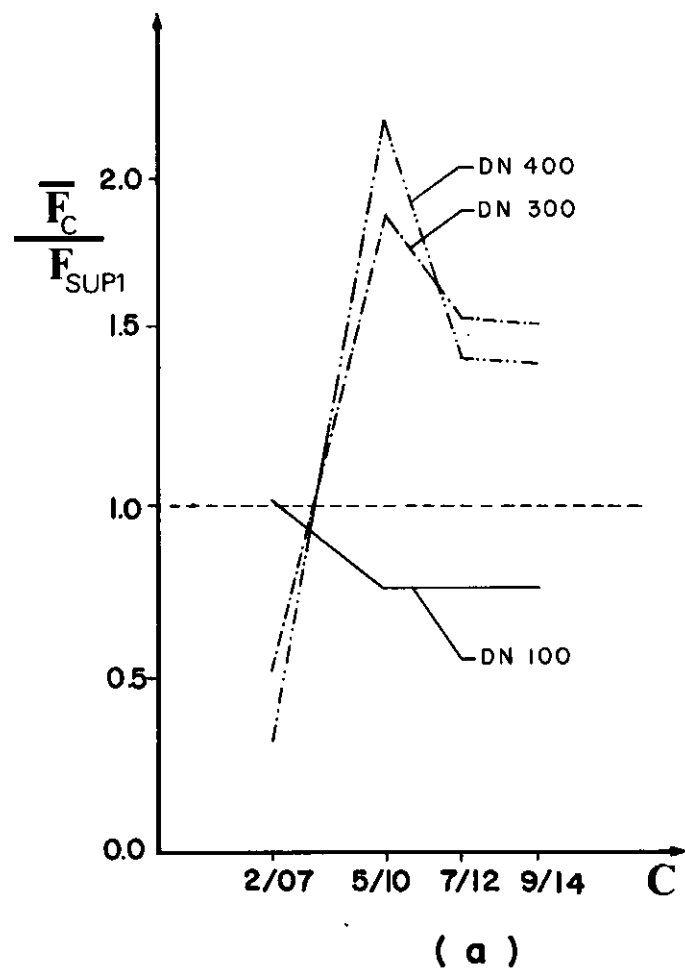


Fig. (V.6): Razão média entre as forças obtidas com rigidez variável dos apoios e as M. R. dos suportes para o carregamento dinâmico

Ao considerar os pares (DN 300, $10^{5/10}$) e (DN 400, SUP 1), com frequências respectivamente 1.463 e 0.822 Hz, vê-se que a variação da rigidez do apoio fez com que, praticamente, dobrasse a frequência fundamental. Enquanto a variação da rigidez do próprio sistema ocasionou um aumento da ordem de 8%. Este fato é interessante e inesperado, visto que a participação da rigidez do apoio na M. R. global do conjunto sistema-apoio deveria ser pequena em comparação com aquela devida aos próprios elementos do sistema. As outras frequências naturais também foram do mesmo modo afetadas; o que pode explicar os picos na fig. (V.6) ao se levar em conta que as baixas frequências, que correspondem a uma participação mais significativa na superposição modal, se deslocaram para uma faixa do espectro, tab. (V.2), que coincide com as altas acelerações, quando se modelou o apoio com $c = 10^{5/10}$.

V.2 - CONCLUSÕES

Demonstrou-se que o reconhecimento da flexibilidade das estruturas de apoio pode ter um efeito apreciável nos resultados da análise. No entanto, as limitações inerentes aos resultados aqui obtidos devem ser claramente estabelecidas. Tomando por base os resultados do Capítulo IV e outros da literatura^{36, 11}, é possível se afirmar que a rigidez à translação apresenta diferenças, em geral, da ordem de 10^4 à 10^5 daquela à rotação, no sistema de unidades adotado aqui. No entanto, a recomendação de um valor específico ainda deve ser observada com cautelas. No caso de um bocal de um vaso com condições de contorno semelhantes às que les da seção (IV.2.2) e parâmetros adimensionais que se situem

entre os extremos ali definidos, é possível, ao se considerar os extremos responsáveis pela maior rigidez, atribuir um valor para a modelagem que, seguramente, será inferior e estará mais próximo do real que os valores até hoje usados como "default". Os gráficos da seção (V.1) devem ser encarados exclusivamente como demonstrativos da influência da rigidez do apoio nos resultados da análise. A extrapolação de um valor recomendável de rigidez por intermédio dos mesmos é limitada, visto que estará intrinsecamente relacionada a configuração do sistema tomado para exemplo.

Além disso, não foram estudados aqui casos como o de um bocal de uma bomba onde, devido às características geométricas deste tipo de conexão, poderiam-se esperar valores mais altos de rigidez.

Tendo em vista o que foi dito acima, uma proposta para um trabalho mais completo e com fins práticos incluiria uma classificação dos tipos de suporte estrutural mais comumente utilizados; bocais de bombas; trocadores de calor; vasos, etc. em faixas de rigidez. A atribuição de uma rigidez de "default" padrão para cada faixa dessa classificação permitiria ao usuário dos códigos computacionais, após o enquadramento conveniente dos pontos de apoio do sistema que estivesse analisando dentro destas faixas, obter diretamente o valor de rigidez que os modelo mais propriamente. Obviamente, justifica-se o uso corrente de uma rigidez alta no fato de que este procedimento fornece, na grande maioria das vezes, resultados mais conservativos na estimativa de cargas atuantes nos apoios; porém, a medida que estejam disponí-

veis valores que permitam o refinamento do modelo, simulando assim, mais adequadamente a realidade física, seu emprêgo possibilitará, devido exatamente a eliminação das incertezas geradas pelo conservativismo, um custo menor do projeto associado a uma maior confiabilidade nos resultados obtidos.

REFERÊNCIAS

1. Moreira, Domício Falcão - Análise Matricial de Estruturas, Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1977.
2. Huebner, H. Kenneth - The Finite Element Method for Engineers, John Wiley e Sons., 1975.
3. Zienkiewicz, O. C. - The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, 1971.
4. Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N. - Theory of Elasticity, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1970.
5. Freitas Neto, José de A. e outros - Caderno de Estruturas - Introdução ao Método dos Elementos Finitos, Universidade Federal do Paraná, 1976.
6. Wang, Chi Teh - Applied Elasticity, McGraw-Hill, 1953.
7. DeVries, G. and Norrie, D. H. - The Finite Element Method, Academic Press, 1973.
8. Gallagher, R. H. - Finite Element Method, Fundamentals, Prentice Hall, 1975.
9. Billimoria, H. D. and Hagstrom, J. - Stiffness Coefficients and Allowable Loads for Nozzles in Flat-Bottom Storage Tanks, Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 100, Nov. 1978.

10. Beyer - Einfluß Von Realistischen Federraten der Unter-
stützungsstrukturen, KWU, Relatório Interno, 1980.
11. Skoda, Metzler - Steifigkeitsmatrizen Von Rohrhalterungen,
KWU, Relatório Interno, 1979.
12. Sterkel, H. P.; Cutrim, J. H. - Influence of the Stiffnes
of Fixed Point or Support Constructions on the Static
and Dynamic Behaviour of Piping Systems, Trans. 6th Int.
Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, K6/2,
Paris, 1981.
13. KWUROHR - User Manual, Version 4.5, 1981.
14. The M. W. Kellogg Company - The Analysis of Piping Systems,
John Wiley, New York, 1977.
15. Stevens, P. G.; Groth, V. J. and Bell, R. B. - Vessel Noz-
zles and Piping Flexibility Analyses, Journal of Engine-
ering for Industry, 1962.
16. Zindeluk, M. and Farache, R. E. S. - Stiffness of a Vessel
at the Attaching Point of a Piping System, Proceedings
of the ASME 2nd International Conference on Computer
Engineering, San Diego, August 1982 - A ser apresentado.
17. Timoshenko, S. P. - Theory of Plates and Shells, McGraw-
Hill, Kogakusha, Ltd., 1959.

18. Kraus, H. - Thin Elastic Shells, John Wiley, 1967.
19. Flügge, W. - Stresses in Shells, Springer Verlag, 1960.
20. Gill, S. S. - The Stress Analysis of Pressure Vessels and Pressure Vessels Components, Pergamon Press Ltd, 1970.
21. Hoff, N. J. - Boundary Value Problems of the Thin-Walled Circular Cylinder, Journal of Applied Mechanics, Pág. 343-350, 1954.
22. Kempner, J. - Remarks on Donnell's Equations, Journal of Applied Mechanics, Vol. 22, nº 1, pág. 117-118, 1955.
23. Hoff, N. J. - The Accuracy of Donnell's Equations, Journal of Applied Mechanics, Vol. 22, nº 3, pág. 329-334, 1955.
24. Gibson, J. E. - Linear Elastic Theory of Thin Shells, Pergamon Press, 1965.
25. Yuan, S. W. - Thin Cylindrical Shells Subjected to Concentrated Loads, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 4, pág. 13, 1946.
26. Odqvist, F. K. G. - Action of Forces and Moments Symmetrically Distributed Along a Generatrix of a Thin Cylindrical Shell, J. Appl. Mechanics, Vol. 13, pág. A-106, 1946.

27. Kitching, R.; Hughes, J. F. and Saedi, F. - Radial Loading of a Cylindrical Shell Through Plate Brackets, J. of Strain Analysis, Vol. 12, nº 13, 1977.
28. Hoff, N. J. and Kempner, J. - Line Load Applied Along Generator of Thin-Walled Circular Cylindrical Shells of Finite Length, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 11, Jan. 1954.
29. The British Standard Institution, BS5500: 1976, Appendix G: Stresses From Local Loads, 1978.
30. Schoeessow, G. J. and Kooistra - Stresses in a Cylindrical Shell Due to Nozzle or Pipe Connection, J. of Appl. Mechanics, nº 67, pág. A107-112, 1945.
31. STARDYNE - User Manual, MRI-STARDYNE for SCOPE 3-4, Control Data Corporation, 1979.
32. PIPESD - User Manual, Control Data Corporation, 1980.
33. Roark, R. J. - Formulas for Stress and Strain, McGraw-Hill, 1975.
34. Rossi, R. R. - Seal Water Tank, Reactions on the Basis Due to Earthquake and Due to Loads on Nozzles, NUCLEN, Relatório Interno, 1980.

35. KWUROHR - Theoretical Manual, Documento Interno, 1979.

36. Schmid - Ermittlung der Federsteifigkeiten Für Die Rohr-
leitungsunterstützungen..., KWU, Relatório Interno, 1979.

37. Justine, T. and Krishnan, A. - Effect of Support Flexi-
bility of Fundamental Frequency of Beams, Letter to the
Editor, Journal of Sound and Vibration, nº 68 (2), pág.
310-312, 1980.

38. Clough, R. W. and Penzien, J. - Dynamics of Structures, Mc-
Graw-Hill, 1975.

39. Venâncio Filho - Notas de Aula do Curso de Análise Dinâmica
das Estruturas, COPPE, 1980.

40. Sterkel, H. P. and Buerhop - Seismic Design Report, KWU,
Relatório Interno, 1979.

41. Meirovitch, L. - Elements of Vibration Analysis, McGraw-
Hill Kogakusha, Ltd., 1975.

42. Farache, R. E. S. - Valores Melhorados de Rigidez para Mo-
delagem de Pontos de Apoio em Sistemas de Tubulação, Tra-
balho de Fim de Curso - PROJETO URÂNIO VI - NUCLEBRÁS-
COPPE, Jan. 1981.

43. Bijlaard, P. P. - Stresses From Local Loadings in Cylindrical Pressure Vessels, Journal of Applied Mechanics, Pág. 805-816, Aug. 1955.

APÊNDICE I

MATRIZES DE RIGIDEZ CORRESPONDENTES A
VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS ADIMENSIONAIS

Nota: D, H, t, d, h e c, dados em (mm).

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 2.50$		$\beta = 9.00$		$\gamma = 50.00$		$\delta = 2.50$
D=800	H= 2000	t= 2	d= 72	h= 1000	c= 50	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1.63E+03					
x_2		2.70E+04				
x_3	2.08E+03		2.14E+05			
x_4		7.74E+05		1.87E+09		
x_5	1.04E+05		1.11E+07		5.98E+08	
x_6		-1.12E+06		-3.48E+07		5.12E+07

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 15.00$		$\beta = 9.00$		$\gamma = 50.00$		$\delta = 2.50$
D= 800	H= 2000	t=12.00	d= 72	h= 1000	c=50	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	5.53E+04					
x_2		2.88E+05				
x_3	4.26E+04		1.41E+06			
x_4		7.01E+06		1.50E+10		
x_5	2.08E+06		7.44E+07		4.77E+09	
x_6		-9.62E+06		-2.59E+08		7.20E+08

MATRIZES CORRESPONDENTES A VARIAÇÃO DO PARÂMETRO $\alpha = t/D.1000$
DO VASO

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 7.50$		$\beta = 3.75$		$\gamma = 50.00$		$\delta = 2.50$
D= 800		H= 2000		t= 6		c= 50
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1.07E+04					
x_2		1.05E+05				
x_3	2.18E+03		5.84E+05			
x_4		5.87E+05		1.38E+09		
x_5	4.05E+05		2.96E+07		1.56E+09	
x_6		-4.53E+06		-2.64E+07		2.31E+08

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 7.50$		$\beta = 13.50$		$\gamma = 50.00$		$\delta = 2.50$
D= 800		H= 2000		t= 6		c= 50
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1.75E+04					
x_2		1.31E+05				
x_3	1.66E+04		7.36E+05			
x_4		6.20E+06		1.37E+10		
x_5	8.22E+05		4.05E+07		2.64E+09	
x_6		-4.34E+06		-2.36E+08		2.59E+08

MATRIZES CORRESPONDENTES A VARIAÇÃO DO PARÂMETRO $\beta = d/D \cdot 100$
DO VASO

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 7.50$		$\beta = 9.00$		$\gamma = 30.00$		$\delta = 2.50$
D= 800		H= 2000		t= 6		c= 50
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1.88E+04					
x_2		2.07E+05				
x_3	2.39E+04		9.30E+05			
x_4		5.48E+06		7.08E+09		
x_5	1.14E+06		4.85E+07		2.71E+09	
x_6		-8.15E+06		-2.47E+08		3.93E+08

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 7.50$		$\beta = 9.00$		$\gamma = 70.00$		$\delta = 2.50$
D= 800		H= 2000		t= 6		c= 50
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1.37E+04					
x_2		8.43E+04				
x_3	6.18E+03		5.26E+05			
x_4		1.63E+06		6.83E+09		
x_5	3.61E+05		2.76E+07		1.63E+09	
x_6		-3.17E+06		-4.19E+07		1.87E+08

MATRIZES CORRESPONDENTES A VARIAÇÃO DO PARÂMETRO $\gamma = h/H.100$

DO VASO

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 7.50$		$\beta = 9.00$		$\gamma = 50.00$		$\delta = 1.25$
D= 800		H= 1000		t= 6		c= 50
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	2.41E+04					
x_2		3.00E+05				
x_3	1.06E+04		1.10E+06			
x_4		3.37E+06		7.34E+09		
x_5	4.99E+05		5.68E+07		3.31E+09	
x_6		-1.22E+07		-1.49E+08		5.76E+08

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 7.50$		$\beta = 9.00$		$\gamma = 50.00$		$\delta = 5.00$
D= 800		H= 4000		t= 6		c= 50
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	8.08E+03					
x_2		3.61E+04				
x_3	1.30E+04		4.01E+05			
x_4		2.52E+06		6.60E+09		
x_5	6.63E+05		2.12E+07		1.31E+09	
x_6		-1.17E+06		-8.94E+07		1.00E+08

MATRIZES CORRESPONDENTES A VARIAÇÃO DO PARÂMETRO $\delta = H/D$
DO VASO

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 15.00$		$\beta = 13.50$		$\gamma = 30.00$		$\delta = 1.25$
D= 800	H= 1000	t= 12	d= 108	h= 300	c=50	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1.55E+05					
x_2		1.30E+06				
x_3	9.48E+04		3.60E+06			
x_4		3.28E+07		3.46E+10		
x_5	3.16E+06		1.92E+08		1.19E+10	
x_6		-4.69E+07		-1.52E+09		2.46E+09

VASO DE MÁXIMA RIGIDEZ

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 2.50$		$\beta = 3.75$		$\gamma = 70.00$		$\delta = 5.00$
D= 800	H= 4000	t= 2	d= 30	h= 2800	c=50	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	6.67E+02					
x_2		4.94E+03				
x_3	6.65E+02		8.69E+04			
x_4		6.74E+04		4.25E+08		
x_5	3.39E+04		4.39E+06		2.26E+08	
x_6		-2.16E+05		-2.68E+06		1.13E+07

VASO DE MÍNIMA RIGIDEZ

APÊNDICE II

TESTES DA INTERPOLAÇÃO COM OUTRAS COMBINAÇÕES
DOS PARÂMETROS ADIMENSIONAIS

Nota: D, H, t, d, h e c, dados em (mm).

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 5.00$		$\beta = 9.00$		$\gamma = 50.00$		$\delta = 2.50$
D= 800		H= 2000		t= 4		d= 72
				h= 1000		c= 50
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	5.43E+03					
x_2		6.42E+04				
x_3	5.30E+03		4.17E+05			
x_4		1.00E+06		2.44E+09		
x_5	2.64E+05		2.13E+07		1.14E+09	
x_6		-2.67E+06		-4.42E+07		1.29E+08

MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 5.00$		$\beta = 9.00$		$\gamma = 50.00$		$\delta = 2.50$
D= 800		H= 2000		t= 4		d= 72
				h= 1000		c= 50
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	6.29E+03					
x_2		7.02E+04				
x_3	6.46E+03		4.44E+05			
x_4		1.84E+06		4.36E+09		
x_5	3.22E+05		2.31E+07		1.28E+09	
x_6		-2.75E+06		-7.87E+07		1.27E+08

INTERPOLAÇÃO

TESTE A

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 7.50$		$\beta = 3.75$		$\gamma = 30.00$		$\delta = 2.50$
D= 800		H= 2000		t= 6		c= 50
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1.38E+04					
x_2		1.75E+05				
x_3	1.55E+04		7.69E+05			
x_4		1.06E+06		1.41E+09		
x_5	7.55E+05		3.90E+07		2.03E+09	
x_6		-7,62E+06		-5.00E+07		3.69E+08

MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 7.50$		$\beta = 3.75$		$\gamma = 30.00$		$\delta = 2.50$
D= 800		H= 2000		t= 6		c= 50
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1.55E+04					
x_2		1.94E+05				
x_3	1.34E+04		8.36E+05			
x_4		3.07E+06		1.53E+09		
x_5	9.17E+05		4.26E+07		2.23E+09	
x_6		-8.28E+06		-1.50E+08		3.92E+08

INTERPOLAÇÃO

TESTE B

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 15.00$		$\beta = 13.50$		$\gamma = 30.00$		$\delta = 1.25$
D= 800		H= 1000		t= 12		c= 50
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1.55E+05					
x_2		1.30E+06				
x_3	9.48E+04		3.60E+06			
x_4		3.28E+07		3.46E+10		
x_5	3.16E+06		1.92E+08		1.19E+10	
x_6		-4.69E+07		-1.52E+09		2.46E+09

MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 15.00$		$\beta = 13.50$		$\gamma = 30.00$		$\delta = 1.25$
D= 800		H= 1000		t= 12		c= 50
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	7.37E+04					
x_2		5.72E+05				
x_3	5.56E+04		2.14E+06			
x_4		1.31E+07		2.24E+10		
x_5	2.66E+06		1.14E+08		7.31E+09	
x_6		-2.11E+07		-5.22E+08		1.25E+09

INTERPOLAÇÃO

TESTE C

(VASO DE MÁXIMA RIGIDEZ)

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 2.50$		$\beta = 3.75$		$\gamma = 70.00$		$\delta = 5.00$
D= 800	H= 4000	t=2	d= 30	h= 2800	c= 50	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	6.67E+02					
x_2		4.94E+03				
x_3	6.65E+02		8.69E+04			
x_4		6.74E+04		4.25E+08		
x_5	3.39E+04		4.39E+06		2.26E+08	
x_6		-2.16E+05		-2.68E+06		1.13E+07

MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 2.50$		$\beta = 3.75$		$\gamma = 70.00$		$\delta = 5.00$
D= 800	H= 4000	t= 2	d= 30	h= 2800	c= 50	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	-7.91E+03					
x_2		-1.02E+05				
x_3	-1.47E+04		-3.09E+05			
x_4		-3.49E+06		-4.11E+09		
x_5	-3.51E+05		-1.70E+07		-1.02E+09	
x_6		3.24E+06		1.77E+08		-1.27E+08

INTERPOLAÇÃO

TESTE D

(VASO DE MÍNIMA RIGIDEZ)

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 2.50$		$\beta = 3.75$		$\gamma = 30.00$		$\delta = 1.25$
D= 800		H= 1000		t=2		c=50
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	2.32E+03					
x_2		9.03E+04				
x_3	3.68E+03		3.55E+05			
x_4		6.30E+05		4.53E+08		
x_5	1.81E+05		1.79E+07		9.05E+08	
x_6		-4.29E+06		-3.10E+07		2.06E+08

MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 2.50$		$\beta = 3.75$		$\gamma = 30.00$		$\delta = 1.25$
D= 800		H= 1000		t= 2		c=50
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1.32E+04					
x_2		2.85E+05				
x_3	6.57E+02		7.94E+05			
x_4		1.21E+06		-3.12E+09		
x_5	2.64E+05		3.95E+07		2.06E+09	
x_6		-1.28E+07		-8.82E+07		5.55E+08

INTERPOLAÇÃO

TESTE E

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 15.00$		$\beta = 13.50$		$\gamma = 70.00$		$\delta = 5.00$
D= 800	H= 4000	t= 12	d= 108	h= 2800	c= 50	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	2.80E+04					
x_2		4.84E+04				
x_3	5.26E+04		7.23E+05			
x_4		1.01E+07		2.82E+10		
x_5	2.86E+06		4.22E+07		3.98E+09	
x_6		-9.51E+05		-1.11E+08		5.46E+08

MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

MATRIZ DE RIGIDEZ DO VASO DE PARÂMETROS:						
$\alpha = 15.00$		$\beta = 13.50$		$\gamma = 70.00$		$\delta = 5.00$
D= 800	H= 4000	t=12	d= 108	h= 2800	c= 50	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	5.26E+04					
x_2		1.86E+05				
x_3	4.03E+04		1.04E+06			
x_4		8.36E+06		2.14E+10		
x_5	2.04E+06		5.72E+07		4.23E+09	
x_6		-5.07E+06		-2.57E+08		5.70E+08

INTERPOLAÇÃO

TESTE F